PROBLEMAS DE TEOREMA DE LA DIVERGENCIA

ENUNCIADO DEL TEOREMA

Sea E una región simple sólida cuya superficie frontera S tiene una orientación positiva (hacia afuera). Sea F un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas sobre una región abierta que contiene a E. Entonces:

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV$$

Recordar que otra notación para div **F** es $\nabla\cdot\mathbf{F}$

PROBLEMAS RESUELTOS

1.) Evaluar el flujo del campo vectorial

$$\mathbf{F}(x;y;z) = xy\mathbf{i} + (y^2 + e^{xz^2})\mathbf{j} + \operatorname{sen}(xy)\mathbf{k}$$

a través de la superficie frontera de la región E acotada por el cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ y los planos $z = 0$, $y = 0$, $y + z = 2$.

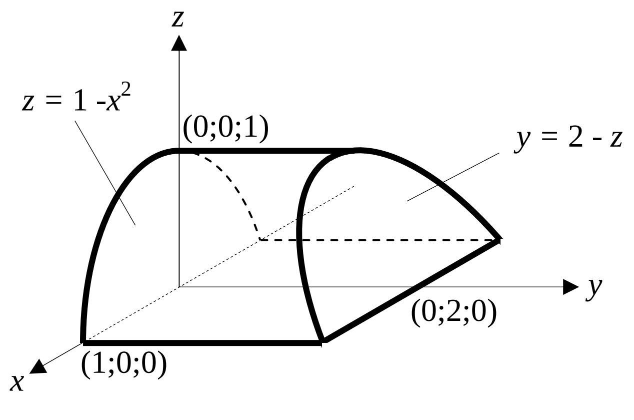
SOLUCIÓN

El problema invita a la transformación de la integral de flujo en algún otro tipo de integral para evitar las complejidades que surgirían de parametrizar el segundo término de la segunda componente del campo vectorial, y también para hacer una sola integral en vez de cuatro.

Para aplicar el teorema de la divergencia calculamos:

div **F** = $y + 2y = 3y$

Evaluaremos la integral de volumen de esta función escalar tomando el dominio como una región de tipo 3; esto es, una región encerrada entre dos funciones de un dominio bidimensional ubicado sobre el plano xz.



$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV = \iiint_E 3y\,dV = 3\int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2}\int_0^{2-z} y\,dy\,dz\,dx = \cdots = \tfrac{184}{35} \;\blacksquare$$

2.) Verificar el teorema de la divergencia para el campo vectorial $\mathbf{F} = |\mathbf{r}|\mathbf{r}$ y la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

SOLUCIÓN:

El vector $\mathbf{r}$ es el vector posición (x; y; z). De modo que en términos de las variables cartesianas el campo vactorial dado puede expresarse como:

$$\mathbf{F} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,(x; y; z)$$

La superficie dada puede parametrizarse a través de coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} x = 3\operatorname{sen}\varphi\cos\theta \\ y = 3\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta \\ z = 3\cos\varphi \end{cases} \quad , \quad \begin{array}{l} 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{array}$$

Con esta parametrización tenemos:

$$\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & 3\operatorname{sen}\varphi\cos\theta & 0 \\ 3\cos\varphi\cos\theta & 3\cos\varphi\operatorname{sen}\theta & -3\operatorname{sen}\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= (-9\operatorname{sen}^2\varphi\cos\theta; -9\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}\theta; -9\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi)$$

¿Es ésta una normal exterior? Probémoslo con un punto. En (0;3;0) tendríamos $\theta = \varphi = \pi/2$, y para tales valores el PVF calculado da (0;-9;0), o sea una normal interna. Por lo tanto la normal externa vendrá dada por el PVF calculado haciendo el producto vectorial en el orden opuesto, esto es:

$$\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\theta = (9\operatorname{sen}^2\varphi\cos\theta; 9\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}\theta; 9\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi)$$

Evaluando ahora $\mathbf{F}$ en función de esta parametrización es:

$\mathbf{F}(\varphi;\theta) = 3(3\operatorname{sen}\varphi\cos\theta;\ 3\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta;\ 3\cos\varphi)$

y:

$\mathbf{F}\cdot(\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\theta) = \cdots = 81\operatorname{sen}\varphi$

Así que:

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F}(\varphi;\theta)\cdot(\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\theta)\,d\varphi\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} 81\operatorname{sen}\pi\, d\varphi\, d\theta = 81\int_0^{2\pi}\left[-\cos\pi\Big|_0^{2\pi}\right]d\theta = 324\pi$$

Hemos hecho un cálculo bastante complejo por integrales de superficie. Veamos ahora cómo reduciendo esto a una integral de volumen con el teorema de la divergencia el cálculo se simplifica notablemente.

Calculemos en primer lugar la divergencia:

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(y\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(x\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$$

Calculando las derivadas parciales por separado y sumando miembro a miembro se tiene:

$$\begin{array}{l}
\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\
\dfrac{\partial}{\partial y}\left(y\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}+\dfrac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\
\dfrac{\partial}{\partial z}\left(z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}+\dfrac{z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\
\hline
\operatorname{div}\mathbf{F}=3\sqrt{x^2+y^2+z^2}+\dfrac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=4\sqrt{x^2+y^2+z^2}
\end{array}$$

Si ahora llevamos esto a coordenadas esféricas tenemos:

$$\iiint_E \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{3} 4\rho\cdot\rho^2 \operatorname{sen}\varphi\, d\rho d\varphi d\theta = 4\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^3 \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi d$$

Haciendo los cálculos obtenemos:

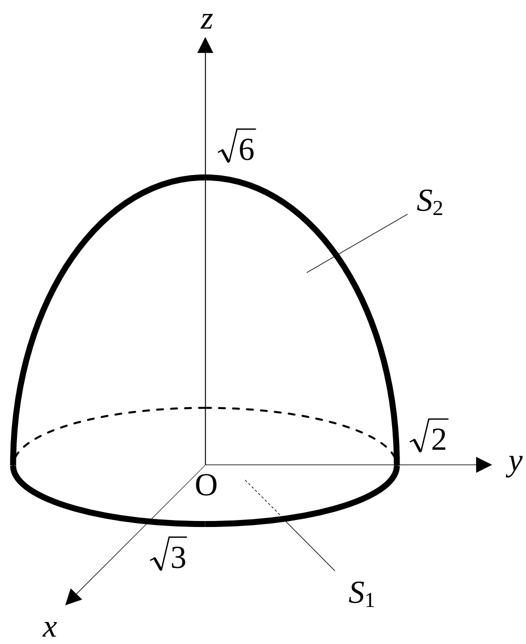
$$\iiint_E \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = 324\pi$$

Hemos obtenido el mismo resultado por los dos caminos, verificando así el teorema de la divergencia.■

3.) Calcular el flujo del campo $\mathbf{F}(x; y; z) = (0; e^{\text{sen}xz} + \tan z; y^2)$ a través del semielipsoide superior $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$, $z \geq 0$ con su normal apuntando hacia arriba.

SOLUCIÓN

Resolveremos este problema por el teorema de la divergencia. Si observamos que div $\mathbf{F} = 0$, y llamando (ver figura) $S = S_1 \cup S_2$ y V el volumen encerrado por S, podemos plantear:



$$\left.\begin{array}{l} \iiint\limits_V \nabla\cdot\mathbf{F}dV \overset{\substack{\text{por ser } \nabla\cdot\mathbf{F}=0 \\ \downarrow}}{=} 0 \\ \iiint\limits_V \nabla\cdot\mathbf{F}dV \overset{\substack{\text{por teor. div.} \\ \downarrow}}{=} \iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{dS} \end{array}\right\} \Rightarrow \iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{dS} = 0 \quad (1)$$

Nos interesa la integral no sobre toda la superficie S, sino sólo sobre S_2. Puesto que la integral es un concepto aditivo respecto al dominio de integración, tendremos

$$\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{dS} = \iint\limits_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dS} + \iint\limits_{S_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dS} \overset{\substack{\text{por ec. (1)} \\ \downarrow}}{=} 0 \Rightarrow \iint\limits_{S_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dS} = -\iint\limits_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dS} \quad (2)$$

Vemos que la integral sobre S_2 es la misma que la integral sobre S_1 cambiada de signo. Calcularemos, pues, esta última, que aparenta ser más sencilla, dado que la normal es un vector vertical y además la superficie carece de componente z. S_1 es una elipse sobre el plano xy, $2x^2 + 3y^2 = 6$, que puede ser parametrizada directamente en coordenadas cartesianas como $\mathbf{T}(x; y) = (x(x; y); y(x; y); z(x; y))$, donde:

$$\begin{cases} x = x \\ y = y, \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3} \\ -\sqrt{2 - \frac{2}{3}x^2} \leq y \leq \sqrt{2 - \frac{2}{3}x^2} \end{array} \quad ,$$

donde los límites para x y y han sido despejados de la ecuación de la elipse. Para esta parametrización, tenemos que el producto vectorial fundamental será:

$$\mathbf{N} = \mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k}$$

Si ejecutáramos el PVF en el orden inverso, nos daría **-k**. ¿Cuál debemos elegir? El enunciado nos pide que la normal de la superficie elipsoidal apunte hacia arriba, lo cual significa que apunte hacia el exterior del volumen indicado en la figura, que es el que usamos para plantear el teorema de la divergencia. Por lo tanto, para la base también deberemos tomar la normal exterior a dicho volumen, esto es, **-k**.

Por lo tanto la integral que buscamos vendrá expresada por:

$$\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dS} = \iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}dS = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{2\text{-}(2/3)x^2}}^{\sqrt{2\text{-}(2/3)x^2}} (0;0;y^2)\cdot(0;0;-1)dydx = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{2\text{-}(2/3)x^2}}^{\sqrt{2\text{-}(2/3)x^2}} -y^2 dydx =$$

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{2/3}\sqrt{3\text{-}x^2}}^{\sqrt{2/3}\sqrt{3\text{-}x^2}} -y^2 dydx = -\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \tfrac{1}{3}y^3\Big|_{-\sqrt{2/3}\sqrt{3\text{-}x^2}}^{\sqrt{2/3}\sqrt{3\text{-}x^2}} dydx = -\tfrac{1}{3}2\left(\tfrac{2}{3}\right)^{3/2}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(3\text{ - }x^2\right)^{3/2}dx \overset{\substack{\text{tablas}\\ \downarrow}}{=}$$

$$= -\tfrac{4}{9}\sqrt{\tfrac{2}{3}}\cdot\tfrac{27}{8}\pi = -\sqrt{\tfrac{3}{2}}\pi$$

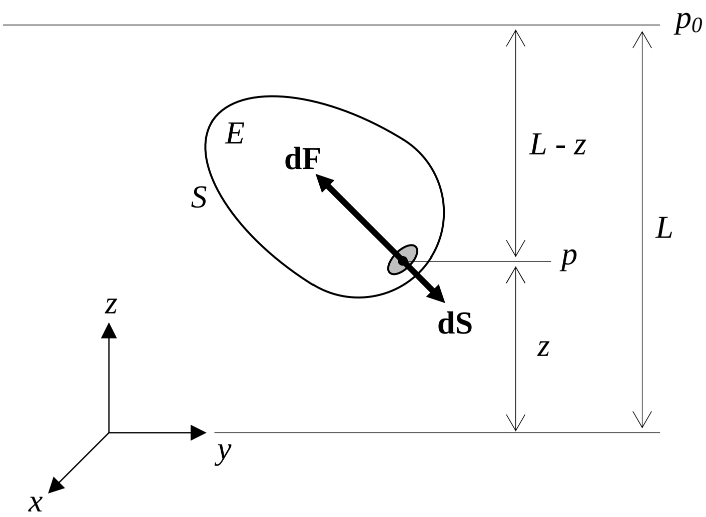
Luego, reemplazando en (2) tenemos

$$\iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dS} = -\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dS} = \sqrt{\tfrac{3}{2}}\pi$$

Que es el resultado que buscábamos. Podrían haberse utilizado también coordenadas elípticas, que hubieran simplificado la integral pero a costa de una mayor complejidad en el cálculo del PVF, lo que significaba aproximadamente el mismo trabajo que operando en cartesianas.■

4.) *Hidrostática.* A partir del principio de Pascal, demostrar el de Arquímedes.
Principio de Pascal: $p = p_0 + \rho g h$
Principio de Arquímedes: Empuje = Peso de líquido desplazado (en módulo).

SOLUCIÓN:



Si E es un sólido con superficie frontera S sumergido en un líquido de densidad consante ρ, en cuya interfase con la atmósfera reina una presión ambiente p_0, y si adoptamos un sistema de coordenadas como el de la figura, el principio de Pascal nos dice que la presión en el diferencial de superficie indicado, ubicado a una profundidad $L - z$, vendrá dada por:

$p = p_0 + \rho g(L - z)$

Por definición de presión, la fuerza que el fluido ejercerá sobre cada elemento de superficie del sólido vendrá dada en igual dirección y sentido contrario a la normal externa a este último, siendo:

$\mathbf{dF} = -p\mathbf{dS}$

La componente vertical de esta fuerza vendrá dada por:

$dF_z = \mathbf{dF}\cdot(0;0;1) = -p\mathbf{dS}\cdot(0;0;1) = -[p_0 + \rho g(L - z)](0;0;1)\cdot\mathbf{dS}$

Si integramos este diferencial de fuerza sobre todo el dominio, esto es, sobre toda la superficie S, obtendremos la componente vertical de la fuerza resultante:

$$F_z = \iint_S -(p_0 + \rho g(L - z))(0;0;1)\cdot\mathbf{dS} = \iint_S (0;0;-p_0 - \rho g L + \rho g z)\cdot\mathbf{dS}$$

Notemos ahora que esta última es una integral de flujo, y que podemos por lo tanto aplicarle el teorema de la divergencia:

$$F_z = \iint_S (0;0;-p_0 - \rho g L + \rho g z)\cdot\mathbf{dS} = \iiint_E \text{div } (0;0;-p_0 - \rho g L + \rho g z)\, dV =$$
$$= \iiint_E \rho g \, dV = g\iiint_E \rho \, dV = gM$$

Donde M es la masa del líquido que ocuparía un volumen igual al del objeto sumergido. La fuerza vertical total, pues, es igual al peso del líquido desplazado. Se deja al lector demostrar por un razonamiento similar que las componentes x e y de la fuerza son nulas. Por lo tanto el empuje total del líquido es igual al peso del líquido desplazado, con lo cual hemos demostrado el principio de Arquímedes.■

PROBLEMAS PROPUESTOS

1) Calcule mediante el teorema de la divergencia el flujo exterior del campo $\mathbf{F}(x;\, y;\, z) = 3xy\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - x^2y^4\mathbf{k}$ sobre la superficie del tetraedro con vértices (0;0;0), (1;0;0), (0;1;0), y (0;0;1).

2) Usar el teorema de la divergencia para evaluar la integral del campo vectorial

$$\mathbf{F}(x;\, y;\, z) = z^2x\,\mathbf{i} + (\tfrac{1}{3}y^3 + \tan z)\,\mathbf{j} + (x^2z + y^2)\,\mathbf{k}$$

sobre la mitad superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

3) Verificar la validez del teorema de la divergencia para el campo $\mathbf{F}(x;\, y;\, z) = zx\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + 3z^2\,\mathbf{k}$ y el sólido E acotado por el paraboloide $x^2 + y^2 = z$ y el plano $z = 1$.

4) Encontrar la densidad de flujo (Flujo/Área) del campo de fuerzas

$$\mathbf{F}(x;\, y;\, z) = (xy^2 + \cos z)\,\mathbf{i} + (xy^2 + \operatorname{sen} z)\,\mathbf{j} + e^z\,\mathbf{k}$$

sobre la superficie frontera del sólido limitado por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z = 4$.

5) Si integramos el campo de velocidades de un fluido sobre una superficie obtenemos el caudal que atraviesa la misma. Sea un líquido sometido a un campo de velocidades dado por

$$\mathbf{v}(x;\, y;\, z) = z\tan^{-1}(y^2)\,\mathbf{i} + z^3\ln(x^2 + 1)\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k},$$

que incluye en su formulación todos los efectos debidos a rozamientos, viscosidad y demás factores disipativos. Hallar el caudal de este líquido que atraviesa un filtro de forma paraboloidal que consta de la parte de la superficie $x^2 + y^2 = 1 - z$ que está por encima del plano $z = 1$. Tomar el filtro orientado hacia arriba.

6) *Ley de Gauss.* Demostrar el siguiente resultado, de importancia trascendente en electromagnetismo. Sea E una región simple sólida en $\mathbf{R^3}$ y S su frontera. Sea también $\mathbf{r}$ el vector posición $(x;y;z)$. Entonces si $(0;0;0) \notin S$, tenemos:

$$\iint_S \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \cdot \mathbf{dS} = \begin{cases} 4\pi & \text{si} \quad (0;0;0) \in E \\ 0 & si \quad (0;0;0) \notin E \end{cases}$$

IDEA. Notar que si el origen pertenece a E no podemos aplicar el teorema de la divergencia, pues el campo vectorial no es suave allí. Aplicar el teorema de la divergencia a toda la región salvo una pequeña bola de radio ε centrada en el origen, y luego calcular el flujo sobre la frontera de esta última.

7) Demostrar que si E es una región en $\mathbf{R^3}$ limitada por una superficie S, donde tanto E como S cumplen las condiciones del teorema de la divergencia, entonces

$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} = 0$ para cualquier campo vectorial $\mathbf{F}$ con derivadas parciales de segundo orden continuas.

8) Usar el teorema de la divergencia para evaluar

$$\iint_S \left(2x + 2y + z^2\right) dS \quad ,$$

donde S es la esfera unitaria centrada en el origen.