

Auxiliar 1)

P₁

Sea $A = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \subseteq \mathbb{R}^n$ un rectángulo cerrado, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ integrable y $g = f$ excepto en un conjunto finito de puntos. Pruebe que g es integrable y $\int_A f = \int_A g$.

P₂

Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ con A un rectángulo cerrado de $\mathbb{R}^n$ y P una partición de A . Pruebe que f es integrable si y sólo si para cada subrectángulo S la función $f|_S$, o sea la restricción de f a S , es integrable, y en este caso $\int_A f = \sum_S \int_S f|_S$.

P₃

(a) Sea $f: [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

probar que f es integrable y calcule $\int_{[0,1] \times [0,1]} f$.

(b) Sea $f: [a,b] \times [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $f(x,y) = g(x)$ con $g: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$. Pruebe que f es integrable si y sólo si g es integrable, y en tal caso $\int_{[a,b] \times [c,d]} f = (d-c) \int_a^b g(x) dx$.

P₄

(i) Sean $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ con A rectángulo cerrado en $\mathbb{R}^n$ y suponga que $f \leq g$. Pruebe que

$$\int_A f \leq \int_A g.$$

(ii) Si $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable, probar que $|f|$ es integrable y que

$$\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f|.$$

P₅

(a) Sea $f: [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ e } y \text{ son racionales} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Pruebe que f no es integrable.

(b) Sea $g: [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$g(x,y) = \begin{cases} 1/p + 1/q & \text{si } x = a/p, y = b/q \text{ irreducibles} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Pruebe que g es integrable y calcule $\int_{[0,1] \times [0,1]} g$.