Auxiliar 10

Teorema: (Multiplicadores de Lagrange) Sean $f: \mathbb{R}^{N+m} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^{N+m} \to \mathbb{R}^m$, funciones de clase C^1. Sea $A = \{z \in \mathbb{R}^{N+m} / g(z) = 0\}$ y supongamos que $f(z_0) = \min_{z \in A} f(z)$. Supongamos además que la matriz de $(N+m) \times m$, $g'(z_0)$ es de rango completo (las columnas son l.i., es decir, $\nabla g_1(z_0), \dots, \nabla g_m(z_0)$ son l.i.). Entonces existen $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tales que

$$\nabla f(z_0) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(z_0)$$

Propiedad: Se define el Lagrangeano $\mathcal{L}(z, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(z) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(z)$, del Teorema de Lagrange se concluye que los máximos y mínimos (cuando existen) son puntos críticos del Lagrangeano.

Si $z_0 \in A$ es punto crítico del Lagrangeano (en realidad $(z_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ es punto crítico) entonces

- Si la Hessiana del Lagrangeano como función sólo de z en z_0 es definido positiva en ∇A, es decir,

$$\forall v \text{ t.q. } \nabla g_1 \cdot v = 0, \nabla g_2 \cdot v = 0, \dots, \nabla g_m \cdot v = 0 \Rightarrow v^t \left(f''(z_0) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i''(z_0) \right) v > 0$$

entonces z_0 es mínimo.

- Si es definida negativa en ∇A entonces z_0 es máximo. (para aplicar este criterio f, g deben ser C^2).

P1 Considere la curva C en $\mathbb{R}^3$ formada por la intersección del cono de ecuación $z^2 = 2x^2 + 2y^2$ y el plano de ecuación $z = 1 - x - y$. Calcule la distancia de la curva C al origen.

P2 Sea $f(x,y,z) = \log(xyz^3)$

i) Sin demostrar su existencia, encuentre el valor máximo de f sobre $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z > 0, x + y + z = 5\}$.

ii) Usando lo anterior, pruebe que $\forall a, b, c > 0$:

$$abc^3 \leq 27 \left(\frac{a+b+c}{5} \right)^5$$

P3 Considere la función $f(x,y,z) = xy + z^2$ sujeta a las dos restricciones

$$y - x = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

Los puntos críticos del Lagrangeano son

$(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0, 0, 1/2), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0, 0, 1/2), (0, 0, 2, 0, 1)$ y $(0, 0, -2, 0, 1)$.

Use el criterio de segundo orden para determinar si alguna de ellas es mínimo.

P4 Sea $A \in M(n\times n)$ simétrica, sea $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x)=x^tAx$.

i) Muestre que existe $v\in\mathbb{R}^n$ tal que $\|v\|=1$

$$f(v) = \min_{\|x\|=1} f(x).$$

ii) Muestre que v es un vector propio de A.

iii) Muestre que el valor propio asociado a v es el menor valor propio de A.

P5 i) Sea $f:\mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n) = (x_1^p+\dots+x_n^p)^q\,(y_1^q+\dots+y_n^q)^p$$

con $p,q\in(1,\infty)$ con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Sin demostrar su existencia, encuentre el mínimo de f sobre

$$R=\{(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^{2n} \;/\; x_1y_1+\dots+x_ny_n=1,\ x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n\geq 0\}.$$

ii) Use lo anterior para demostrar la desigualdad de Hölder:

$$\forall a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n\geq 0:\quad a_1b_1+\dots+a_nb_n \leq \sqrt[p]{a_1^p+\dots+a_n^p}\,\sqrt[q]{b_1^q+\dots+b_n^q}$$