

Auxiliar 10

■ Teorema: (Multiplicadores de Lagrange) Sean $f: \mathbb{R}^{N+m} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^{N+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$, funciones de clase C^1 . Sea $A = \{z \in \mathbb{R}^{N+m} / g(z) = 0\}$ y supongamos que $f(z_0) = \min_{z \in A} f(z)$. Supongamos además que la matriz de $(N+m) \times m$, $\nabla g'(z_0)$ es de rango completo (los columnas son l.i., es decir, $\nabla g_1(z_0), \dots, \nabla g_m(z_0)$ son l.i.). Entonces existen $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tales que

$$\nabla f(z_0) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(z_0).$$

■ Propiedad: Se define el Lagrangeano $L(z, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(z) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(z)$, del Teorema de Lagrange se concluye que los máximos y mínimos (cuando existen) son puntos críticos del Lagrangeano. Si $z_0 \in A$ es punto crítico del Lagrangeano (en realidad $(z_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ es punto crítico) entonces

- Si la Hessiana del Lagrangeano como función sólo de z en z_0 es definida positiva en ∇A , es decir,
 $\forall v \neq 0. \quad \nabla g_1 \cdot v = 0, \nabla g_2 \cdot v = 0, \dots, \nabla g_m \cdot v = 0 \Rightarrow v^T (f''(z_0) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g''_i(z_0)) v > 0$

entonces z_0 es mínimo.

- Si es definida negativa en ∇A entonces z_0 es máximo. (para aplicar este criterio f, g deben ser C^2)



Considera la curva C en \mathbb{R}^3 formada por la intersección del cono de ecuación $z^2 = 2x^2 + 2y^2$ y el plano de ecuación $z = 1 - x - y$. Calcula la distancia de la curva C al origen.

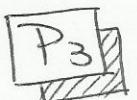


Sea $f(x, y, z) = \log(xy z^3)$

- i) Sin demostrar su existencia, encuentra el valor máximo de f sobre $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z > 0, x+y+z=5\}$.

- ii) Usando lo anterior, prueba que $\forall a, b, c \geq 0$:

$$abc^3 \leq 27 \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^5.$$



Considera la función $f(x, y, z) = xy + z^2$ sujeta a las dos restricciones
 $y - x = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Los puntos críticos del Lagrangeano son

$$(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0, 0, 1/2), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0, 0, 1/2), (0, 0, 2, 0, 1) \text{ y } (0, 0, -2, 0, 1).$$

Usa el criterio de segundo orden para determinar si alguno de ellos es mínimo.

P₄

Ser $A \in M(n \times n)$ simétrica, ser $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^t A x$.

i) Muestre que existe $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|v\|=1$ y

$$f(v) = \min_{\|x\|=1} f(x).$$

ii) Muestre que v es un vector propio de A .

iii) Muestre que el valor propio correspondiente a v es el menor valor propio de A .

P₅

i) Ser $f: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = (x_1^p + \dots + x_n^p)^{\frac{q}{p}} (y_1^q + \dots + y_n^q)^{\frac{p}{q}}$$

con $p, q \in (1, \infty)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sin demostrar su existencia, encuentre el mínimo de f sobre

$$R = \{(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n} / x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = 1, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \geq 0\}.$$

ii) Use lo anterior para demostrar la desigualdad de Hölder:

$$\forall q_1, \dots, q_n, b_1, \dots, b_n \geq 0: q_1 b_1 + \dots + q_n b_n \leq \sqrt[p]{q_1^p + \dots + q_n^p} \sqrt[q]{b_1^q + \dots + b_n^q}.$$