MA2001-4 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Juan Dávila
Auxiliar: Roberto Villaflor

Auxiliar 9

28 de Mayo del 2012

- **Teorema de Taylor:** Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, Ω abierto. Suponga f de clase $C^m(\Omega)$, con $m \geq 1$. Sean $x_0 \in \Omega$, $h \in \mathbb{R}^n$ tal que $x_0 + th \in \Omega$ para todo $t \in [0, 1]$. Entonces vale la Fórmula de Taylor de orden $m - 1$:

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{m-1} T_k(h) + R_m(h)$$

donde $T_0(h) = f(x_0)$ y para $k \geq 1$,

$$T_k(h) = \frac{1}{k!} \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}}(x_0) h_{i_1} \cdots h_{i_k}$$

y

$$R_m(h) = \frac{1}{m!} \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_m=1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_m}}(x_0 + \xi h) h_{i_1} \cdots h_{i_m}$$

con $\xi = \xi(h) \in (0, 1)$.

- **Obs:** Es importante destacar que:

$$T_1(h) = \nabla f(x_0)^t h, \quad T_2(h) = \frac{1}{2} h^t f''(x_0) h.$$

- **Definición:** Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, con Ω abierto y f diferenciable. Un punto $x_0 \in \Omega$ se dice punto crítico de f, si y sólo si, $\nabla f(x_0) = 0$.

- **Teorema:** Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, con Ω abierto, y f diferenciable. Si $x_0 \in \Omega$ es un punto de extremo local de f, entonces x_0 es un punto crítico de f.

- **Teorema:** Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, con Ω abierto, y f de clase C^2. Sea $x_0 \in \Omega$ un punto crítico de f, entonces:

  1.- Si $f''(x_0)$ es definida positiva, entonces x_0 es mínimo local estricto de f.

  2.- Si $f''(x_0)$ es definida negativa, entonces x_0 es máximo local estricto de f.

  3.- Si $f''(x_0)$ es indefinida, entonces x_0 no es extremo local f y se denomina punto silla.

  4.- Si x_0 es mínimo local de f, entonces $f''(x_0)$ es semidefinida positiva.

  5.- Si x_0 es máximo local de f, entonces $f''(x_0)$ es semidefinida negativa.

- **Teorema:** Sea $A \in \mathcal{M}(n \times n)$ simétrica. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

  (a) A es definida positiva, i.e., $\forall x \neq 0 : x^t A x > 0$.

(b) Los valores propios de A son positivos.

(c) Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A^{(1)} = (a_{11}), \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \cdots, \quad A^{(n)} = A:$$

entonces

$$det(A^{(1)}) = a_{11} > 0, \quad det(A^{(2)}) > 0, \cdots, \quad det(A^{(n)}) = det(A) > 0.$$

P1. (a) Encuentre la expansión de Taylor de orden 2 de

$$f(x,y) = x\log(1+y) + \sin(x+y)$$

en torno de $(0,0)$.
Pruebe que para $x^2 + y^2 \leq 1/4$ se tiene

$$|f(x,y) - P_2(x,y)| \leq \frac{3}{2}(|x| + |y|)^3$$

donde P_2 es la expansión de orden 2 encontrada anteriormente.

(b) Sea $f(x,y) = xye^{x^2+2y^2}$. Encuentre (explícitamente) un polinomio en dos variables, $T(x,y)$, con la propiedad que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - T(x,y)}{x^4 + y^4} = 0.$$

P2. (a) Hallar todos los puntos críticos de la función

$$f(x,y) = \sin(x) + y^2 + 2y\cos(x) + 1,$$

y utilizando el criterio de la segunda derivada clasifíquelos si es posible.

(b) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 en todo su dominio, y sea (x_0, y_0) un punto extremo local de f. Supongamos que f es armónica, es decir,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Entonces, pruebe que todas las derivadas parciales segundas de f se anulan en (x_0, y_0).

P3. (a) Encuentre los puntos críticos de

$$f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$$

y determine si son máximos locales, mínimos locales o puntos silla.

(b) Para la función anterior, pruebe que

$$\lim_{||(x,y)||\to\infty} f(x,y) = 0$$

y deduzca que f alcanza su valor máximo y mínimo. Calcule estos valores.