Auxiliar 7: Cálculo en Varias Variables

¡Importante!:

Teorema de la Función Implícita: Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^m$ abiertos y $f: \Omega \times \Lambda \to \mathbb{R}^m$ de clase C^k. Si $(x_0, y_0) \in \Omega \times \Lambda$, $f(x_0, y_0) = 0$ y $f_y(x_0, y_0)$ es invertible. Entonces existen $U \subseteq \Omega$, $V \subseteq \Lambda$ abiertos con $(x_0, y_0) \in U \times V$ y una función $\phi: U \to V$ de clase C^k tal que

(i) $f(x, \phi(x)) = 0 \quad \forall x \in U$,

(ii) $f(x,y) = 0, \ (x,y) \in U \times V \implies y = \phi(x), \quad \forall x \in U$.

(iii) $\phi'(x) = -[f_y(x, \phi(x))]^{-1} \cdot f_x(x, \phi(x))$

SP1 Definamos $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $\boxed{f((T,p),V) = p(V-b)e^{\frac{a}{RTV}} - RT}$ donde a, b y R son constantes. Como se supone que V depende de (T,p) como una función diferenciable de modo que $f((T,p), V(T,p)) = 0 \quad \forall (T,p) \in \mathbb{R}^2$; podemos aplicar la regla de la cadena a la función

$$h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(T,p) \longmapsto f((T,p), V(T,p)) \equiv 0$$

ya que f es diferenciable (pues es suma, producto y composición de funciones diferenciables) y ya que la función

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$$
$$(T,p) \longmapsto ((T,p), V(T,p))$$

también lo es (pues $(T,p) \longmapsto (T,p)$ es la identidad y $(T,p) \longmapsto V(T,p)$ es diferenciable por la suposición del enunciado). Luego

$$h'(T,p) = (f \circ \varphi)'(T,p) = f'(\varphi(T,p)) \cdot \varphi'(T,p)$$

Regla de la cadena

Como $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h'(T,p) \in M(1 \times 2)$ y como $h \equiv 0$, $\boxed{h'(T,p) = (0,0)}$.

Como $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f'(\varphi(T,p)) \in M(1 \times 3)$ y como $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi'(T,p) \in M(3 \times 2)$.

Luego tenemos:

$$(0,0) = h'(T,p) = f'(\varphi(T,p)) \cdot \varphi'(T,p)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial T}(\varphi(T,p)), \frac{\partial f}{\partial p}(\varphi(T,p)), \frac{\partial f}{\partial V}(\varphi(T,p))\right) \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial T}(T,p) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial p}(T,p) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial T}(T,p) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial p}(T,p) \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial T}(T,p) & \frac{\partial \varphi_3}{\partial p}(T,p) \end{bmatrix}$$

Ojo: $\varphi_1(T,p) = T$, $\varphi_2(T,p) = p$, $\varphi_3(T,p) = V(T,p)$. Además cabe destacar que la notación $\frac{\partial f}{\partial T}$ (o bien $\frac{\partial f}{\partial p}, \frac{\partial f}{\partial V}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial T}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial p}, \ldots$, etc) no guarda estricta relación con la variable T (o bien $p, V, T, p, \ldots$, etc, respectivamente), solamente indica respecto a qué coordenada se toma la derivada parcial, luego podríamos colocar indistintamente cualquier otra variable que denote que tomamos derivada parcial respecto a la primera coordenada, por ejemplo $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ (o bien $\frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}, \ldots$, etc).

$$\Rightarrow \quad (0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial T}(\varphi(T,p)), \frac{\partial f}{\partial p}(\varphi(T,p)), \frac{\partial f}{\partial V}(\varphi(T,p))\right) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial V}{\partial T}(T,p) & \frac{\partial V}{\partial p}(T,p) \end{bmatrix}$$

Ojo: Como $\varphi(T,p) = (\underbrace{(T,p)}_{Id(T,p)}, V(T,p)) \Rightarrow \varphi'(T,p) = \begin{bmatrix} Id_{\mathbb{R}^2} \\ V'(T,p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial V}{\partial T} & \frac{\partial V}{\partial p} \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{\partial f}{\partial T}(\varphi(T,p)) + \frac{\partial f}{\partial V}(\varphi(T,p)) \cdot \frac{\partial V}{\partial T}(T,p)$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial p}(\varphi(T,p)) + \frac{\partial f}{\partial V}(\varphi(T,p)) \cdot \frac{\partial V}{\partial p}(T,p)$$

$$\Rightarrow \quad \nabla V(T,p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial T}(T,p) \\ \frac{\partial V}{\partial p}(T,p) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{\partial f}{\partial V}(\varphi(T,p))\right)^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial T}(\varphi(T,p))\right) \\ -\left(\frac{\partial f}{\partial V}(\varphi(T,p))\right)^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial p}(\varphi(T,p))\right) \end{bmatrix}$$

Donde: $\frac{\partial f}{\partial T}(\varphi(T,p)) = p(V-b)\, e^{\frac{a}{RTV}}\left(\frac{-a}{RT^2V}\right) - R$

$$\frac{\partial f}{\partial p}(\varphi(T,p)) = (V-b)\, e^{\frac{a}{RTV}} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial V}(\varphi(T,p)) = p e^{\frac{a}{RTV}} + p(V-b)\, e^{\frac{a}{RTV}}\left(\frac{-a}{RTV^2}\right).$$

Ahora, si suponemos $a=b=0$ tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial T}(\varphi(T,p)) = p\cdot V\cdot e^{0}\cdot 0 - R = -R \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial p}(\varphi(T,p)) = V\cdot e^{0} = V,$$

$$\frac{\partial f}{\partial V}(\varphi(T,p)) = p\cdot e^{0} + p\cdot V\cdot e^{0}\cdot 0 = p.$$

$$\Rightarrow \quad \nabla V(T,p) = \begin{bmatrix} \frac{R}{p} \\ -\frac{V}{p} \end{bmatrix}$$

tomando $(T_0, p_0) = (1/R, 1)$, como $f((T_0,p_0), V(T_0,p_0)) = 0$

$$\Rightarrow \quad p_0 \cdot V(T_0,p_0)\cdot e^{0} - RT_0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad V(T_0,p_0) = \frac{RT_0}{p_0} = \frac{R\cdot 1/R}{1} = 1.$$

$$\Rightarrow \quad \nabla V(T_0,p_0) = \begin{bmatrix} R \\ -1 \end{bmatrix}$$

Así, la ecuación del plano tangente al grafo de V en (T_0, p_0) es:

$$\left\langle \begin{pmatrix} \nabla V(T_0,p_0) \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T-T_0 \\ p-p_0 \\ z-V_0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{\left\langle \begin{pmatrix} R \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T-1/R \\ p-1 \\ z-1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0} \qquad \blacksquare$$

SP_2 Se nos pide demostrar la existencia de una vecindad del punto $(0, y_0)$ tal que la ecuación $F(x,y)=0$ posee solución única en la vecindad y más aún (como para cada x existe un único y) el elemento y tal que $F(x,y)=0$ viene dado por una función $g(x)=y$ de clase C^1 para (x,y) en dicha vecindad del $(0,y_0)$. Para esto ocuparemos el Teorema de la Función Implícita.

Si F satisface las condiciones del Teorema de la Función Implícita, entonces este teorema nos asegura que existe una vecindad de la forma $U \times V$ con $(0, y_0) \in U \times V$ y una función $g: U \to V$ de clase C^1 tal que

$$\text{(i)} \quad F(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in U$$
$$\text{(ii)} \quad F(x,y)=0, \ (x,y) \in U \times V \Rightarrow y = g(x)$$

lo que nos entrega una expresión de y en función de x de clase C^1, y donde para la vecindad $U \times V$ la ecuación

$$F(x,y)=0$$

posee solución (por (i)) y es única (por (ii)), como se quiere demostrar.

Verifiquemos que F cumple las hipótesis:

1°) $F(0, y_0) = 0$:

$$F(0,y_0) = (a_0+0) + (a_1+0)y_0 + \dots + (a_n+0)y_0^n$$
$$= a_0 + a_1 y_0 + \dots + a_n y_0^n = P(y_0) = 0 \qquad \text{pues } y_0 \text{ es raíz de } P.$$

2°) $F_y(0, y_0)$ es invertible:

$$F_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left((a_0+x_0) + (a_1+x_1)y + \dots + (a_n+x_n)y^n\right)$$
$$= (a_1+x_1) + \dots + n(a_n+x_n)y^{n-1}$$
$$\Rightarrow F_y(0,y_0) = (a_1+0) + \dots + n(a_n+0)y_0^{n-1}$$
$$= a_1 + 2a_2 y_0 + \dots + n a_n y_0^{n-1}$$
$$= P'(y_0) \neq 0 \qquad \text{pues } y_0 \text{ es raíz simple de } P.$$

$\Rightarrow F_y(0, y_0)$ es invertible.

3°) F es C^1:

Es claro que las derivadas parciales existen y son continuas pues

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}: \ \frac{\partial F}{\partial x_i}(x,y) = y^i, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = (a_1+x_1) + \dots + n(a_n+x_n)y^{n-1}$$ que son polinomios

Luego, como F verifica las hipótesis del Teorema de la Función Implícita, existe la vecindad de $(0, y_0)$ buscada. Solo resta verificar que:

$$\nabla g(0) = -\frac{1}{P'(y_0)}(1, y_0, \dots, y_0^n).$$

Y esto se tiene pues, como $0 \in U$:

$$g'(0) = -\left[F_y(0,y_0)\right]^{-1} \cdot \left[F_x(0,y_0)\right]$$

$$= -\left(P'(y_0)\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x_0}(0,y_0), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(0,y_0)\right)$$

$$= -\frac{1}{P'(y_0)}\left(y_0^0, y_0^1, \dots, y_0^n\right)$$

$$= -\frac{1}{P'(y_0)}\left(1, y_0, \dots, y_0^n\right). \blacksquare$$

SP3 (a) Como se tiene el cambio de variables

$$v(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)$$

tenemos: $v(r,\theta) = u(x(r,\theta), y(r,\theta)) = (u \circ \varphi)(r,\theta) \iff \boxed{v = u \circ \varphi}$

donde
$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(r,\theta) \longmapsto (x,y) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)$$

luego por ley de la cadena se tiene:

$$\frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\cdot\frac{\partial x}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\cdot\frac{\partial y}{\partial r}(r,\theta)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\cdot\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\cdot\text{sen}\,\theta \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,\theta) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\,\text{sen}\,\theta\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\right)\cos\theta + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right)\text{sen}\,\theta$$

$$= \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)\cdot\frac{\partial x}{\partial r}(r,\theta)\cos\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}(x,y)\cdot\frac{\partial y}{\partial r}(r,\theta)\cos\theta\right] +$$

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x,y)\cdot\frac{\partial x}{\partial r}(r,\theta)\,\text{sen}\,\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)\cdot\frac{\partial y}{\partial r}(r,\theta)\,\text{sen}\,\theta\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,\theta) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)\cdot \cos^2\theta + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y)\cdot \cos\theta \operatorname{sen}\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)\cdot \operatorname{sen}^2\theta \quad (2)$$

<u>Ojo</u>: Como u es C^2 se tiene por el Teorema de Schwarz que $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x,y)$.

$$\frac{\partial v}{\partial \theta}(r,\theta) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\cdot \frac{\partial x}{\partial \theta}(r,\theta) + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\cdot \frac{\partial y}{\partial \theta}(r,\theta)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\cdot(-r\operatorname{sen}\theta) + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\cdot r\cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}(r,\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\cdot(-r\operatorname{sen}\theta) + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\cdot r\cos\theta\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\right)\cdot(-r\operatorname{sen}\theta) + \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\cdot(-r\cos\theta) +$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right)\cdot r\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\cdot(-r\operatorname{sen}\theta)$$

$$= \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta}(r,\theta)\cdot(-r\operatorname{sen}\theta) + \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x,y)\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta}(r,\theta)\cdot(-r\operatorname{sen}\theta)\right] + \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\cdot(-r\cos\theta)$$

$$+ \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x,y)\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta}(r,\theta) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta}(r,\theta)\right] r\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\cdot(-r\operatorname{sen}\theta)$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)\cdot r^2\operatorname{sen}^2\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)\cdot r^2\cos^2\theta - 2r^2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x,y)\cdot\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$- \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\, r\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\, r\operatorname{sen}\theta \quad (3)$$

Así obtenemos de (1), (2) y (3):

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,\theta) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)\cdot\cos^2\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)\operatorname{sen}^2\theta + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x,y)\cos\theta\operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\frac{\cos\theta}{r} + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}(r,\theta) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)\operatorname{sen}^2\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)\cos^2\theta - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x,y)\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\frac{\cos\theta}{r} - \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}\right)(r,\theta) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = (\Delta u)(x,y) = (\Delta u)(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$$

(b) Supongamos que existe $v(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$ que separa variables; entonces por lo hecho en (a):

$$(\Delta u)(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = r\cos\theta\,(r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta)^{3/2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}\right)(r,\theta) = r^4\cos\theta \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \left(a''(r) + \frac{1}{r}a'(r)\right)b(\theta) + \frac{1}{r^2}a(r)b''(\theta) = r^4\cos\theta$$

Si imponemos $b(\theta) = \cos\theta \Rightarrow b''(\theta) = -\cos\theta$

$$\Rightarrow \quad a''(r)\cos\theta + \frac{1}{r}a'(r)\cos\theta - \frac{1}{r^2}a(r)\cos\theta = r^4\cos\theta$$

luego nos basta con encontrar $a(r)$ tal que:

$$a''(r) + \frac{1}{r}a'(r) - \frac{a(r)}{r^2} = r^4$$

Si imponemos $a(r) = \alpha r^6$

$$30\alpha r^4 + 6\alpha r^4 - \alpha r^4 = r^4$$

luego nos basta con

$$30\alpha + 6\alpha - \alpha = 1 \iff \alpha = \frac{1}{35}$$

Así $v(r,\theta) = \dfrac{r^6\cos\theta}{35}$ cumple la ecuación (1), por lo tanto

$$u(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = \frac{r^6\cos\theta}{35} = \frac{r^5}{35}\cdot r\cos\theta$$

así la función u queda:

$$u(x,y) = \frac{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}x}{35}$$

que satisface la ecuación del problema. ■

S_{P_4} (a) Como f es C^1, y $\forall x\in\mathbb{R}$ $f(x,\phi(x))=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,\phi(x))\neq 0$, entonces por el Teorema de la Función Implícita se tiene que $\forall (x_0,\phi(x_0))\in\mathbb{R}^2$:

$\exists U,V\subseteq\mathbb{R}$ abiertos t.q. $(x_0,\phi(x_0))\in U\times V$; $\exists g: U\to V$ de clase C^1 t.q.

(i) $f(x,g(x)) = 0 \quad \forall x\in U$,

(ii) $g(x_0) = \phi(x_0)$,

(iii) $\forall\ (x,y) \in U \times V$ con $f(x,y)=0 \Rightarrow y = g(x)$.

Veamos que $\forall x \in U \cap I: g(x) = \phi(x)$*: Sea $x \in U \cap I$ arbitrario definamos

$$F(y) = f(x,y), \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow F'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

y como f es C^1, F es C^1. Luego como F' es continua y nunca se anula, por el Teorema del Valor Intermedio F' es siempre positiva, o bien, es siempre negativa; luego F es monótona estrictamente y por lo tanto F es inyectiva. Así, como

$$F(\phi(x)) = f(x,\phi(x)) = 0 = f(x,g(x)) = F(g(x))$$

$$\Rightarrow \phi(x) = g(x).$$

Así, $\phi|_{U \cap I} = g$ y como g es C^1, $\phi|_{U \cap I}$ es C^1. Luego como $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ $\exists U'$ vecindad de x_0 tal que $\phi|_{U'}$ es $C^1 \Rightarrow \phi$ es C^1 en todo I.

*<u>Ojo</u>: Uno puede tentarse a argumentar que $\forall x \in U \cap I: g(x) = \phi(x)$ ya que como

$$f(x,\phi(x)) = 0 \Rightarrow \phi(x) = g(x).$$

Este argumento es válido solamente si $(x,\phi(x)) \in U \times V$, es decir, si

$$\forall x \in U \cap I, \quad \phi(x) \in V$$

pero a priori eso no tiene porqué ser cierto.

(b) Consideremos $g: U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\boxed{g((x,y),z) = (x^2+y^4)z + z^3 - 1}$.

Veamos que para $(x_0,y_0) \in U$ arbitrarios, g satisface las condiciones del Teorema de la Función Implícita en $((x_0,y_0), f(x_0,y_0))$:

- g es C^∞: Ya que respecto a cada una de sus variables es C^∞ (un polinomio).
- $g((x_0,y_0), f(x_0,y_0)) = 0$.
- $g_z((x_0,y_0), f(x_0,y_0))$ es invertible: Pues, como $g((x_0,y_0), f(x_0,y_0)) = 0$

$$\Rightarrow f(x_0,y_0)\left(x_0^2 + y_0^4 + f^2(x_0,y_0)\right) = 1$$

$$\ldots x_0^2 + y_0^4 + f^2(x_0,y_0) > 0$$

y como $x_0^2+y_0^4+f^2(x_0,y_0)\geq 0 \Rightarrow f(x_0,y_0)>0 \wedge x_0^2+y_0^4+f^2(x_0,y_0)>0$.

$$\Rightarrow g_z((x_0,y_0),f(x_0,y_0)) = (x_0^2+y_0^4)+3f^2(x_0,y_0)>0 .$$

Luego, por el Teorema de la Función Implícita:

$\exists\, \Theta \subseteq U$ abierto de $\mathbb{R}^2$, $\exists V \subseteq \mathbb{R}$ abierto con $((x_0,y_0),f(x_0,y_0)) \in \Theta\times V$,

$\exists\, \xi : \Theta \to V$ t.q. $f(x_0,y_0) = \xi(x_0,y_0)$, $g((x,y),\xi(x,y))=0\ \forall (x,y)\in\Theta$,

ξ es C^∞, y $\forall ((x,y),z)\in \Theta\times V$ t.q. $g((x,y),z)=0 \Rightarrow z=\xi(x,y)$

Veamos que $\xi(x,y)=f(x,y)$, $\forall (x,y)\in\Theta$: Sea $(x,y)\in\Theta$

Como $g((x,y),\xi(x,y))=0=g((x,y),f(x,y))$

$$\Rightarrow \xi(x,y)(x^2+y^4+\xi^2(x,y))=1=f(x,y)(x^2+y^4+f^2(x,y))$$

$$\Rightarrow \xi(x,y)>0,\ f(x,y)>0 \ \text{ y } 0=(f(x,y)-\xi(x,y))\underbrace{(x^2+y^4+f^2(x,y)+f(x,y)\xi(x,y)+\xi^2(x,y))}_{>0}$$

$$\Rightarrow f(x,y)=\xi(x,y).$$

Así $f|_\Theta=\xi$, y como ξ es $C^\infty \Rightarrow f|_\Theta$ es C^∞; luego como $\forall (x_0,y_0)\in U$

$\exists\, \Theta$ vecindad de (x_0,y_0) tal que $f|_\Theta$ es $C^\infty \Rightarrow f$ es C^∞ en todo U.

(c) Definamos $F: U\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ por $F(x,y)=g(x)-\int_0^y (t^2+1)\,dt$. Veamos que

$\forall x_0\in U$, F satisface las condiciones del Teorema de Función Implícita en el punto $(x_0,f(x_0))$:

- F es C^r: Pues g es C^r y $\int_0^y (t^2+1)dt$ es C^∞ (es un polinomio).
- $F(x_0,f(x_0)) = g(x_0)-\int_0^{f(x_0)}(t^2+1)dt=0$.
- $F_y(x_0,f(x_0))$ es invertible: Pues $F_y(x_0,f(x_0)) = -(f^2(x_0)+1)<0$.

Luego, por el Teorema de Función Implícita:

$\exists\, \Theta \subseteq U$ abierto de $\mathbb{R}^m$, $\exists V\subseteq\mathbb{R}$ abierto con $(x_0,f(x_0))\in\Theta\times V$, $\exists\,\phi:\Theta\to V$

de clase C^r t.q. $f(x_0)=\phi(x_0)$, $F(x,\phi(x))=0\ \ \forall x\in\Theta$ y

$\forall (x,y)\in\Theta\times V$ t.q. $F(x,y)=0 \Rightarrow y=\phi(x)$.

Veamos que $\phi(x)=f(x)\ \ \forall x\in\Theta$: Sea $x\in\Theta$

$F(x,\phi(x))=0=F(x,f(x)) \Rightarrow \int_0^{\phi(x)}(t^2+1)dt = \int_0^{f(x)}(t^2+1)dt$

Supongamos sin pérdida de generalidad que $\phi(x) \leq f(x)$.

$$\Rightarrow \int_{\phi(x)}^{f(x)} (t^2+1)\, dt = 0$$

$$\text{si } \phi(x) < f(x) \Rightarrow \int_{\phi(x)}^{f(x)} (t^2+1)\, dt \geq (f(x) - \phi(x)) \cdot \min_{t \in [\phi(x), f(x)]} (t^2+1) > 0 \quad \text{—×—}$$

$$\Rightarrow \phi(x) = f(x).$$

Así, $f|_{\Theta} = \phi$ y como ϕ es C^r, $f|_{\Theta}$ es C^r. Luego como $\forall x_0 \in U$ $\exists \Theta$ vecindad de x_0 con $f|_{\Theta}$ de clase C^r $\Rightarrow$ f es C^r en todo U. ■

S_{P_5} Definamos $h: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ por $h(a,x) = \nabla f(x) + a \nabla g(x)$; veamos que h satisface las hipótesis del Teorema de la Función Implícita en $(0, x_0)$:

- h es C^1: Pues f y g son C^2 y h es lineal afín respecto a a (C^∞).
- $h(0, x_0) = \nabla f(x_0) + 0 \cdot \nabla g(x_0) = 0$.
- $h_x(0, x_0)$ es invertible: Pues $h_x(0,x_0) = f''(x_0) + 0 \cdot g''(x_0) = f''(x_0)$ que es invertible.

Así, por el Teorema de la Función Implícita:

$\exists U \subseteq \mathbb{R}$ abierto $\exists V \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto con $(0, x_0) \in U \times V$, $\exists \xi: U \longrightarrow V$ de clase C^1 tal que $\xi(0) = x_0$ y $\forall a \in U$: $h(a, \xi(a)) = 0$, y más aún,

si $(a,x) \in U \times V$ con $h(a,x) = 0 \Rightarrow x = \xi(a)$.

Entonces $\forall a \in U$: $h(a, \xi(a)) = 0 \iff \nabla f(\xi(a)) + a \nabla g(\xi(a)) = 0$

$$\iff \nabla f^a(\xi(a)) = 0 \iff \xi(a) \text{ es punto crítico de } f^a. \blacksquare$$

S_{P_6} (a) Consideremos $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x,y) = \int_0^x M(t,y)\, dt + \int_0^y N(0,s)\, ds$$

Veamos que f es C^1 y que $\nabla f = \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}$:

por el Teorema Fundamental del Cálculo,

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = M(x,y)$

$f(x,y) = \int_0 M(t,y) \ldots \int_0$

Veamos que f es C^1 y que $\nabla f = \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \quad \text{por el Teorema Fundamental del Cálculo,}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_0^x M(t,y)\,dt\right) + N(0,y) = \int_0^x \frac{\partial M}{\partial y}(t,y)\,dt + N(0,y)$$

~~se~~ acepta como cierto por indicación.

Ojo: Al expandir la derivada por definición tenemos:

$$\int_0^x M(t,y+h)\,dt = \int_0^x \left(M(t,y) + \frac{\partial M}{\partial y}(t,y)\,h + o_t(h)\right) dt$$
$$= \int_0^x M(t,y)\,dt + \left(\int_0^x \frac{\partial M}{\partial y}(t,y)\,dt\right) h + \int_0^x o_t(h)\,dt$$

Luego se tiene que $\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_0^x M(t,y)\,dt\right) = \int_0^x \frac{\partial M}{\partial y}(t,y)\,dt$ sii $\lim_{h\to 0} \frac{\left|\int_0^x o_t(h)\,dt\right|}{|h|} = 0$;

esta última condición ~~es~~ la que se acepta cierta.

$\Rightarrow$ Como $\frac{\partial M}{\partial y}(t,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(t,y)$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \int_0^x \frac{\partial N}{\partial x}(t,y)\,dt + N(0,y) = N(x,y) - \cancel{N(0,y)} + \cancel{N(0,y)}$$

Luego $\nabla f = \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}$ y f es C^1 ya que sus derivadas parciales existen y son continuas.

(b) Definimos $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $g(x,y) = f(x,y) - f(x_0,y_0)$, g es C^1, $g(x_0,y_0)=0$

y $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = N(x_0,y_0) \neq 0$, luego por el Teorema de la Función Implícita

$\exists\, I \subseteq \mathbb{R}$ abierto y $\exists\, J \subseteq \mathbb{R}$ abierto con $(x_0,y_0) \in I\times J$, $\exists\, y : I \to J$ de clase C^1

t.q. $y(x_0) = y_0$ y $\forall x \in I: \; g(x, y(x)) = 0$, más aún,

$\forall (\bar{x},\bar{y}) \in I\times J$ con $g(\bar{x},\bar{y}) = 0 \Rightarrow \bar{y} = y(\bar{x})$.

Así, $\forall x \in I$: $\quad g(x,y(x)) = 0 \Leftrightarrow f(x,y(x)) = f(x_0,y_0)$ constante

$\Rightarrow \forall x \in I$: $\frac{\partial}{\partial x}\big(f(x,y(x))\big) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x))\cdot\frac{\partial y}{\partial x} = 0$

$$\Leftrightarrow N(x,y)\frac{\partial y}{\partial x} + M(x,y) = 0 \quad \blacksquare$$