Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
7 de mayo de 2012

Auxiliar #7: Cálculo en Varias Variables

Profesor: Juan Dávila
Auxiliar: Roberto Villaflor.

- **Teorema: (Regla de la cadena)** Sea $f : \Omega \to \Lambda$, $g : \Lambda \to \mathbb{R}^k$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Lambda \subset \mathbb{R}^m$ abiertos. Si $x_0 \in \Omega$, f es diferenciables en x_0, y g es diferenciable en $f(x_0)$, entonces $g \circ f$ es diferenciable en x_0 y

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

i.e. $\forall i \in \{1, 2, ..., k\}$, $\forall j \in \{1, 2, ..., n\}$:

$$\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}(x_0) = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial x_l}(f(x_0))\frac{\partial f_l}{\partial x_j}(x_0)$$

- **Definición:** Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, f se dice de clase $C^k(\Omega)$ si $\forall x \in \Omega$ existen sus derivadas parciales hasta orden k y son continuas.

- **Teorema: (Función Implícita)** Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Lambda \subset \mathbb{R}^m$ abiertos y $f : \Omega \times \Lambda \to \mathbb{R}^m$ una función de clase $C^k(\Omega \times \Lambda)$. Si $(x_0, y_0) \in \Omega \times \Lambda$, $f(x_0, y_0) = 0$ y $f_y(x_0, y_0)$ es invertible. Entonces existe un abierto $U \subset \Omega$ con $x_0 \in U$ y una función $\phi : U \to \Lambda$ de clase $C^k(U)$ tal que

$$f(x, \phi(x)) = 0, \ \forall x \in U.$$

P1. La ecuación de Dietereci del etado de un gas es:

$$p(V - b)e^{a/RTV} = RT$$

donde a, b y R son constantes. Suponiendo que es posible definir V como una función diferenciable de T y p, calcule el gradiente de V. Suponiendo que $a = b = 0$, calcule la ecuación del plano tangente al grafo de V en el punto $(T_0, p_0) = (1/R, 1)$.

P2. Sea $n \in \mathbb{N}^*$ y sea $y_0 \in \mathbb{R}$ una raíz simple del polinomio con coeficientes reales

$$P(y) = a_0 + a_1 y + ... + a_n y^n.$$

Sea $x = (x_0, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. pruebe que en una vecindad de $(0, y_0)$, la ecuación

$$F(x, y) = (a_0 + x_0) + (a_1 + x_1)y + ... + (a_n + x_n)y^n = 0$$

admite una única solución $y = g(x)$ de clase C^1 tal que:

$$\nabla g(0) = -\frac{1}{P'(y_0)}(1, y_0, ..., y_0^n).$$

P3. Sea $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2. Su *Laplaciano* se define como

$$(\Delta u)(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y).$$

Considere la función $u(x, y)$ expresada en coordenadas polares, esto es la función

$$v(r, \theta) := u(r \cos\theta, r \sin\theta).$$

(a) Demuestre que

$$(\Delta u)(r\cos\theta, r\sin\theta) = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}\right)(r,\theta).$$

(b) Considere la ecuación en derivadas parciales

$$\Delta u(x,y) = x(x^2+y^2)^{3/2} \text{ en } \mathbb{R}^2.$$

Encuentre una solución $u(x,y)$, que en términos de v separe variables, esto es que tenga la forma $v(r,\theta) = a(r)b(\theta)$.

P4. (a) Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1, con $\dfrac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ en todo $\mathbb{R}$, y $\phi : I \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,\phi(x)) = 0$ $\forall x \in I$. Pruebe que ϕ es de clase C^1.

(b) Sea $f : U \to \mathbb{R}$ continua en el abierto $U \subset \mathbb{R}^2$, tal que $(x^2+y^4)f(x,y) + f(x,y)^3 = 1$ para cualquier $(x,y) \in U$. Pruebe que f es C^∞.

(c) Sea $f : U \to \mathbb{R}$ continua en el abierto $U \subset \mathbb{R}^m$. Si la función $g : U \to \mathbb{R}$, dada por la expresión $g(x) = \displaystyle\int_o^{f(x)} (t^2+1)dt$ fuera de clase C^r, entonces f también es C^r.

P5. Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dos funciones de clase C^2. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto tal que $\nabla f(x_0) = 0$ y $f''(x_0)$ es invertible. Demuestre que para todo $a \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeño, la función

$$f^a(x) := f(x) + ag(x)$$

posee al menos un punto crítico.

P6. Sean $M(x,y)$, $N(x,y)$ funciones de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$ tales que

$$(1)\ \frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Se le pide demostrar el *lema de Poincare*: Existe un *potencial para el campo vectorial* (M,N), esto es, una función escalar $f(x,y)$ de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\nabla f = \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}.$$

Indicacion: Considere

$$f(x,y) = \int_0^x M(t,y)dt + \int_0^y N(0,s)ds,$$

aceptando que derivación en y e integral en x pueden intercambiarse en la expresión anterior.

(b) Suponga que las funciones M y N satisfacen (1). Considere la *ecuacion diferencial exacta* para una función $y = y(x)$,

$$(2)\ N(x,y)\frac{dy}{dx} + M(x,y) = 0.$$

Pruebe que si $N(x_0,y_0) \neq 0$ entonces existe un intrvalo I que contiene a x_0, y una solución $y = y(x)$ de (2) en I, con $y(x_0) = y_0$.