MA2001-4 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Juan Dávila
Auxiliar: Roberto Villaflor

Auxiliar 6

30 de Abril del 2012

- **Teorema de la Función Inversa:** Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, una función de clase $C^1(\Omega)$ con Ω abierto y $x_0 \in \Omega$. Si $f'(x_0)$ es invertible; entonces existe $U \subset \Omega$ abierto con $x_0 \in U$, tal que $V = f(U)$ es abierto y $f : U \to V$ es biyectiva $C^1(U)$. Más aún, $f^{-1} : V \to U$ es de clase $C^1(V)$ y

$$(f^{-1})'(y) = [f'(f^{-1}(y))]^{-1}, \forall y \in V$$

- **Definición:** Una función $f : \Omega \to \Lambda$, con $\Omega, \Lambda \subset \mathbb{R}^n$ abiertos, se dice $difeomorfismo$ si es diferenciable, biyectiva, con inversa diferenciable. Cuando la función además es $C^k(\Omega)$ y su inversa es $C^k(\Lambda)$, se dice un difeomorfismo C^k.

P1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por:

$$f(x, y) = \left(x + \frac{y}{2} - y^3, y - \frac{y^2}{2} - x + \frac{x^3}{6}\right).$$

Pruebe que f admite inversa local de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$ en torno al punto $(0, 0)$. Calcule además la derivada de f^{-1} en $(0, 0)$.

P2. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $g(u, v) = (u^2 + uv^2 + 10v, u + v^3)$. Pruebe que, restringida a una vecindad del punto $(1, 1)$, g posee inversa diferenciable. Calcule, la derivada de esta inversa en $g(1, 1)$ y úsela para calcular un valor aproximado de una solución al sistema:

$$\begin{aligned} u^2 + uv^2 + 10v &= 11{,}8 \\ u + v^3 &= 2{,}2 \end{aligned}$$

P3. Sea $f : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{n^2}$ definida por $f(X) = X^k$ con $k \in \mathbb{N}$ fijo. Calcule $f'(I)$ y pruebe que es invertible. Concluya que toda matriz lo suficientemente próxima a la identidad posee raíz k-ésima.

P4. Sean $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones de clase $C^1(\mathbb{R})$. Defina $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $F(x, y) = (f(x)h(y), g(y))$. Suponga que f y g son difeomorfismos de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$. Pruebe que F es difeomorfismo si y sólo si $0 \notin h(\mathbb{R})$.

P5. Sean $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ continua, con $g(t) > 0$ $\forall t \geq 0$ y $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y\}$. Defina $f : U \to \mathbb{R}^2$ por

$$f(x, y) = \left(\int_0^{x+y} g(t)dt, \int_0^{y-x} g(t)dt\right).$$

Muestre que f es un difeomorfismo sobre un abierto de $\mathbb{R}^2$.