MA2001-4 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Juan Dávila
Auxiliar: Roberto Villaflor

Auxiliar 4

16 de Abril del 2012

P1. Considere la función:

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}\sin\left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right), \text{ para } (x,y) \neq (0,0),$$

y $f(0,0) = 0$.

i) Pruebe que f es continua en todo $\mathbb{R}^2$.

ii) Pruebe que para cualquier vector unitario e, existen las derivadas direccionales $f'((0,0);e)$.

iii) Calcule las derivadas parciales de f en $(0,0)$.

iv) Determine si f es diferenciable en $(0,0)$.

P2. Considerando la identificación de $\mathbb{R}^{n^2}$ con $\mathcal{M}(n\times n)$, dada por tomar el vector $A \in \mathbb{R}^{n^2}$ y dividirlo en n columnas para formar una matriz de $n \times n$:

a) Pruebe que si $A_i : \mathbb{R} \to \mathcal{M}(n\times n)$ son funciones diferenciales en todo punto de $\mathbb{R}$ para $i = 1, 2$; entonces la función:

$$P(t) = A_1(t)\cdot A_2(t)$$

es diferenciable en todo $\mathbb{R}$ y calcule su derivada.

b) Pruebe que la función $f : \mathcal{M}(n\times n) \to \mathbb{R}$ dada por $f(A) = det(A)$ es diferenciable y determine sus derivadas parciales.

c) Pruebe que el conjunto $GL_n(\mathbb{R})$ de las matrices invertibles de $n \times n$ es abierto en $\mathcal{M}(n\times n)$.

d) Pruebe que la función $F : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}(n\times n)$ dada por $F(A) = A^{-1}$ posee derivadas parciales en todo $GL_n(\mathbb{R})$ y que son continuas. Concluya que F es diferenciable y exprese su diferencial.