MA2001-4 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Juan Dávila
Auxiliar: Roberto Villaflor

Auxiliar 2

2 de Abril del 2012

P1. Estudie la existencia de los siguientes límites:

i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(2x) - 2x + y}{x^3 + y}$

ii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2xy\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)$

iii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$

iv) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2yz}{\sqrt{x^{12} + y^6 + z^4}}$

P2. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función; f se dice coersiva, si:

$$\lim_{||x||\to\infty} f(x) = +\infty$$

a) Pruebe que si f es coersiva y continua, entonces f alcanza su mínimo.

b) Pruebe que la función $f(x, y, z) = \operatorname{senh}^2(x) + |y|^3 + z^2$ alcanza su mínimo en algún punto de $\mathbb{R}^3$.

c) Considere $f : B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \dfrac{1 - xy}{1 - x^2 - y^2}$. Pruebe que f alcanza su mínimo en $B(0, 1)$. (**Sugerencia:** Considere la función $f \circ \psi$, con $\psi : \mathbb{R}^2 \to B(0, 1)$ definida por $\psi(x) = x/(1 + ||x||)$).

P3. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto, tal que A^c también es abierto. Suponga que A y A^c son no vacíos, y que $x_0 \in A$, $x_1 \in A^c$. Considere $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } (1 - t)x_0 + tx_1 \in A \\ -1 & \text{si } (1 - t)x_0 + tx_1 \in A^c \end{cases}$$

a) Pruebe que g es continua.

b) Observe que la parte anterior contradice el Teorema del Valor Intermedio, y concluya que $A = \phi \vee A = \mathbb{R}^n$.

c) Finalmente concluya que si $X \subset \mathbb{R}^n$ tiene frontera abierta y no vacía, entonces $Fr(X) = \mathbb{R}^n$.