MA2001-4 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Juan Dávila
Auxiliar: Roberto Villaflor

Auxiliar 1

26 de Marzo del 2012

P1. Encuentre (sin demostración) el interior, adherencia, frontera y derivado de los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{Q}, y > x^2\} \\ A_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < x < 1, y = \sin(1/x)\} \end{aligned}$$

P2. a) Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto, pruebe que $Int(Fr(A)) = \phi$.

b) Pruebe que si $B \subset \mathbb{R}^n$ es numerable o finito, entonces $Int(B) = \phi$.

c) Muestre un $X \subset \mathbb{R}^n$ con fontera abierta.

d)esafío) Muestre que si $X \subset \mathbb{R}^n$ tiene frontera abierta, entonces $Fr(X) = \mathbb{R}^n$.

P3. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua.

a) Pruebe que $\{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = 0\}$ es cerrado.

b) Pruebe que $\{x \in \mathbb{R}^n | f(x) > 0\}$ es abierto.

P4. a) Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ una sucesión tal que

$$\forall n \in \mathbb{N} : ||x_{n+1} - x_n|| > 1.$$

Pruebe que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no posee subsucesiones de Cauchy.

b) Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Pruebe que A es cerrado y acotado, si y sólo si, toda sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ posee una subsucesión convergente

$$a_{n_k} \to a$$

con $a \in A$. (Sugerencia: Para la implicancia hacia la derecha utilice Bolzano-Weierstrass. Para la implicación izquierda utilice la parte anterior para probar que A es acotado).

P5. Pruebe que si $A \subset \mathbb{R}^n$ es no numerable, entonces $Der(A) \neq \phi$. (Sugerencia: Piénselo un minuto... ahora proceda por contradicción; ¿qué cardinal poseen los conjuntos $B(0,n) \cap A$, con $n \in \mathbb{N}$?).