MA2001 - Calculo en Varias Variables
Profesor: Manuel del Pino
Auxiliar: Andrés Zúñiga

U. DE CHILE INGENIERIA

Clase Auxiliar 3

Diferenciabilidad de funciones en $\mathbb{R}^n$

- **Def.-** Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un abierto y $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que u es Hölder continua de exponente $\alpha > 0$, si existe $K > 0$ tal que:

$$|u(x) - u(y)| \leq K\|x - y\|^{\alpha} \quad \forall x, y \in \Omega$$

Defina el conjunto

$$C^{\alpha}(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{R}/ \ u \text{ es Hölder continua de exponente } \alpha \in (0, 1)\}$$

En el caso $\alpha = 1$ se dice que la función u es Lipschitz de constante K.

P1.- *a*) Caracterice al conjunto $C^{\alpha}(\Omega)$ cuando $\alpha > 1$ y Ω es conexo, estimando el tamaño de sus derivadas.

b) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal $f(x) = Ax$. Demuestre que $\forall x \in \mathbb{R}^n$ la derivada de f en x es la misma aplicacion lineal $Df_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, dada por $Df_x(h) = Ah$.

c) Sea $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática $g(x) = x^t Ax$, con $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ cualquiera. Demuestre que $\forall x \in \mathbb{R}^n$ la derivada de g en x, es la aplicacion lineal $Dg_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$Dg_x(h) = x^t(A + A^t)h$$

¿Cómo queda la derivada si A es una matriz simétrica de $n \times n$?.
¿Qué se recupera en el caso que $n = 1$?

d) Sea $\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ el producto interno usual en $\mathbb{R}^N$ dado por $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$. Demuestre que $\langle \cdot , \cdot \rangle$ es derivable en $\mathbb{R}^{2N}$y de hecho su derivada en el punto (x_0, y_0) es una forma bilineal $D\langle \cdot , \cdot \rangle(x_0, y_0) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por

$$D\langle \cdot , \cdot \rangle(x_0, y_0)\big|_{(h,k)} = \langle x_0, k\rangle + \langle h, y_0\rangle$$

P2.- Calcule el gradiente de las siguientes funciones a valores reales:

i) $f(x, y, z) = xe^{-x^2-y^2-z^2}$ ii) $g(x, y, z) = \dfrac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$ iii) $q(x) = \|x\|^2$

iv) $k(x) = \|x\|$ v) $\phi(x) = \dfrac{1}{n(n-2)\alpha_n} \cdot \dfrac{1}{\|x\|^{n-2}}, \forall n \geq 3$

P3.- Calcule la matriz derivada (Jacobiana) de las siguientes funciones a valores vectoriales:

i) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad f(x,y)=(x,y)$

ii) $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\quad g(w,z)=(we^z+\cos z,\ w\cosh z\ ,\operatorname{sen} w+e^z)$

iii) $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\quad h(u,v)=(uve^{uv},\ \arctan u\cdot v\ ,5uv^3)$

iv) $p:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\quad p(r,\theta,\phi)=(r\cos\theta\sin\phi,\ r\sin\theta\sin\phi,\ r\cos\phi)$

P4.- Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una función dada por:

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & \text{si } x=0\ \vee\ y=0\\ 0 & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Pruebe que f posee derivadas parciales bien definidas en $(0,0)$, esto es, que existen los números $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, sin embargo f no es diferenciable en $(0,0)$. ¿Puede ocurrir esto?

P5.- Considere las funciones $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ y $\lambda:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ dadas por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}\qquad \lambda(t)=\begin{cases}(t\ ,\ t^2\operatorname{sen}\frac{1}{t}) & \text{si } t\neq 0\\[2ex] (0,0) & \text{si } t=0\end{cases}$$

a) Determinar para cúales direcciones existe la derivada direccional de f en $(0,0)$.

b) Encuentre las derivadas parciales de f donde existan.

c) Muestre que λ es diferenciable en $t=0$.

d) Estudie la diferenciabilidad de $f\circ\lambda$ en $t=0$. Concluya acerca de la diferenciabilidad de f en $t=0$.

P6.- Encuentre la derivada direccional de $f(x,y,z)=xyz$ en la dirección dada por el vector velocidad de la hélice

$$\vec{r}(t)=(\cos(3t),\sin(3t),3t)$$

en $t=\frac{\pi}{3}$