**MA2001 - Calculo en Varias Variables**
**Profesor:** Manuel del Pino
**Auxiliar:** Andrés Zúñiga

# Clase Auxiliar 2

## Continuidad y Límites en $\mathbb{R}^n$

- **Def.-** Un conjunto $K \subseteq \mathbb{R}^N$ se dice **compacto** $\Leftrightarrow$ $K$ es cerrado y acotado.

**P1**.- Encuentre el interior, adherencia, frontera y el derivado (ie, el cjto de los ptos de acumulacion) de los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^2$

1) $I = [0,1) \cup (1,3) \cup \{5\}$ 2) Para $\lambda \in \mathbb{R}:\ A_\lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = \lambda x\}$

3) $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x \in \mathbb{Q},\ y > x^2\}$

**P2**.- Sea $f : A \subset \mathbb{R}^N \to B \subset \mathbb{R}^M$ una función continua que suponemos además biyectiva, en donde $A$ es compacto. Pruebe que $f^{-1} : B \to A$ es también una función continua.

**P3**.- Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to B \subseteq \mathbb{R}^m$ una función continua, pruebe que:

i) Si $B$ es abierto de $\mathbb{R}^m$ $\Rightarrow$ $f^{-1}(B)$ es abierto de $\mathbb{R}^n$.
ii) Si $B$ es cerrado de $\mathbb{R}^m$ $\Rightarrow$ $f^{-1}(B)$ es cerrado de $\mathbb{R}^n$.

**P4**.- *a*) Definamos $f(x,y) = \dfrac{x^2y^3}{x^4+y^6}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$.
Estudie la existencia del límite de $f$ en $(0,0)$. ¿Es $f$ una función continua?

*b*) Sea $\{(x_n,y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión cualquiera contenida en la recta $y = x$, y sea

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{y} \quad f(0,0) = 0$$

Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n)$. ¿Qué puede decir de la continuidad de $f$?

**P5**.- Sea $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una continua que satisface las siguientes propiedades

- $f(0) > 0$
- $f(x) < 0$ para todo $x$ con $\|x\| > 1$.

Demuestre que $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$ tal que $f(x) \leq f(\bar{x})\ \forall x \in \mathbb{R}^N$.

**P6**.- Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-1/|x|} \cdot e^{|y|}}{|x|+|y|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

*a*) Demuestre que $f(x,y)$ es una función continua.
*b*) ¿Es $\lim\limits_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y) = +\infty$?
*c*) Demuestre que la función alcanza un mínimo global.

**P7**.- Considere el conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0, \ y \geq 0\}$$

y la función

$$f(x,y) = e^{-x^2-y^2}[x^2y^2 + \ln(1+xy)]$$

*a*) Demuestre que $A$ es un conjunto cerrado, y que $f$ es continua en todo punto de $\mathbb{R}^2$.

*b*) Demuestre que $\exists(\bar{x},\bar{y}) \in A$ tal que

$$f(\bar{x},\bar{y}) \geq f(x,y) \ , \quad \forall(x,y) \in A$$

*c*) ¿Alcanza $f$ su valor mínimo en $A$? Justifique su respuesta.

**P8**.- El propósito de este problema es probar que no existen homeomorfismos uniformemente equicontinuos entre un conjunto no vacío $U \subsetneqq \mathbb{R}^N$ y el espacio $\mathbb{R}^N$. Es decir, suponga que $U \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto no vacío, y que $\varphi : U \to \mathbb{R}^N$ es una función biyectiva, continua en $\mathbb{R}^N$, y con inversa continua (homeomorfismo) que además satisface $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que si $\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \epsilon$ (tipo de continuidad en donde $\delta$ no depende ni de $x$ ni de $y$), entonces $U$ debe ser igual a todo $\mathbb{R}^N$.

*a*) Pruebe que si $U \subseteq \mathbb{R}^N$ es abierto y cerrado a la vez, entonces necesariamente $U = \emptyset$ ó $U = \mathbb{R}^N$.

*b*) Pruebe que si $\{x_n\}_n \subset U$ es una sucesión de Cauchy y si $\varphi$ es uniformemente continua, entonces la sucesión $\{\varphi(x_n)\}_n$ es también de Cauchy en $\mathbb{R}^N$.

*c*) Usando la completitud de $\mathbb{R}^N$ deduzca que $U$ es cerrado, y concluya.

**Propuesto:** Este resultado es un poco más general, en el sentido que sólo basta que $U \subset \mathbb{R}^N$ sea no vacío y que exista una función continua en $\mathbb{R}^N$ y biyectiva $\varphi : U \to \mathbb{R}^N$, para asegurar que $U = \mathbb{R}^N$.

Este resultado puede interpretarse como que $U$ no puede ser biyectivo con $\mathbb{R}^N$ incluido estrictamente en él, y que al mismo tiempo tenga la misma noción de conjuntos abiertos que en $\mathbb{R}^N$.