MA2001 - Calculo en Varias Variables
Profesor: Manuel del Pino
Auxiliar: Andrés Zúñiga

U. DE CHILE
INGENIERIA

Clase Auxiliar 1

Topología, Continuidad y Límites en $\mathbb{R}^n$

- **Def.-** Un conjunto $K \subseteq \mathbb{R}^N$ se dice **compacto** $\Leftrightarrow$ K es cerrado y acotado.
- **Def.-** La unión e intersección numerables de conjuntos $\{E_n\}_n \subset \mathbb{R}^N$, se caracterizan por

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \{x \in \mathbb{R}^N : \exists n_0 \in \mathbb{N},\ x \in E_{n_0}\} \quad \text{y} \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n = \{x \in \mathbb{R}^N : \forall n \in \mathbb{N},\ x \in E_n\}$$

P1.- Demuestre las siguientes igualdades de conjuntos en $\mathbb{R}^N$, con la convención $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$

$$\text{i)} \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B\left(0, \frac{1}{n}\right) = \{0\} \quad \text{ii)} \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} B\left(0, \frac{1}{n}\right) = B(0,1) \quad \text{iii)} \overline{\mathbb{Q}^N \cap B(0,1)} = \overline{B(0,1)}$$

P2.- Pruebe las siguientes propiedades topológicas de los subconjuntos de $\mathbb{R}^N$.

a) Si $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ es una familia de abiertos, entonces $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ es abierto en $\mathbb{R}^N$.

b) Si $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ es una familia de cerrados , entonces $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k$ es cerrado en $\mathbb{R}^N$.

c) Sean A y B dos subconjuntos de $\mathbb{R}^N$, tales que A es abierto y B es numerable.
Pruebe que $A + B = \{a + b \;/\; a \in A,\ b \in B\}$ es abierto en $\mathbb{R}^N$.

P3.- Demuestre que la suma en $\mathbb{R}^N$ y la ponderación por escalar en $\mathbb{R}^N$ son funciones continuas.
Esto es, que $+ : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, $(x, y) \to x + y$ y $\bullet : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, $(\lambda, y) \to \lambda \cdot y$ son continuas en los espacios productos respectivos.

<u>**Ind:**</u> Considere que la norma en $E \times F$ se define mediante $\|(x, y)\|_{E\times F} = \|x\|_E + \|y\|_F$

P4.- Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua en todo punto. Considere el epígrafo de f dado por

$$\mathsf{Epi}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; z \geq f(x, y)\}$$

Demuestre que $\mathsf{Epi}(f)$ es un conjunto cerrado.

P5.- Considere el conjunto $A := (0, +\infty) \times (0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2$ y la transformación de coordenadas polares $g : A \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$g(\rho, \theta) = (\rho \cdot \cos(\theta)\ ,\ \rho \cdot \text{sen}(\theta))$$

a) Pruebe que g es una biyección continua de A en $P = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, que satisface

$$g(\{(\rho, \theta) :\ 0 < \rho < \alpha,\ 0 < \theta \leq 2\pi\}) = B(\vec{0}, \alpha) \setminus \{0\}$$

b) Sea $f : P \to \mathbb{R}$ y $F := f \circ g : A \to \mathbb{R}$ el representante de f en coordenadas polares. Pruebe que una condición equivalente para que

$$\lim_{(x,y)\in P;\ (x,y)\to(0,0)} f(x,y) = a < +\infty$$

es que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que si } \rho \in (0,\delta) \text{ entonces se tiene } |F(\rho,\theta) - a| < \varepsilon \ , \ \forall \theta \in (0, 2\pi]$$

(En tal caso se dice que $\lim_{\rho\to 0} F(\rho,\theta) = a$, *uniforme en* θ)

c) Para números $p, q > 0$, defina $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mediante

$$f(x,y) = \frac{x^p y^q}{x^2 + y^2 - xy} \quad \text{, con} \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x, y > 0\}$$

Decida la existencia de

$$\lim_{(x,y)\in D;\ (x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

dependiendo de los distintos valores que pueden tomar p y q.

d) Definiendo ahora $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mediante

$$f(x,y) = \frac{y}{x} \operatorname{sen}(x^2 + y^2) \ \text{ si } (x,y) \neq (0,0); \quad f(0,y) \equiv 0$$

Estudie la continuidad de f en $(0,0)$.