Auxiliar 12: Álgebra Lineal

Profesor: Jaime Ortega P., Auxiliares: Orlando Rivera Letelier y Rodrigo Arce
Lunes 18 de Junio de 2012

P1. Encuentre una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine matrices P y D tales que $A = PDP^t$.

P2. Considere las siguientes matrices reales:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- Calcule los valores y vectores propios de las matrices A , B y C . Determine cuales de ellas son diagonalizables.
- Determine cuales de ellas son similares entre sí.

P3. Determine para que valores de α y β la siguiente matriz es diagonalizable:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

P4. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Determine P invertible y D diagonal, de modo que $A = PDP^{-1}$.

P5. Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Si $q(x) = c_m x^m + c_{m-1} x^{m-1} + \dots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$ es un polinomio a coeficientes reales, se define $q(A) = c_m A^m + c_{m-1} A^{m-1} + \dots + c_2 A^2 + c_1 A + c_0 I$.

Probar que si A es diagonalizable, y $p(\lambda)$ es su polinomio característico, entonces $p(A) = 0$.

P6. Sea A una matriz de $n \times n$, con $n \geq 3$ a coeficientes reales, de modo que $\dim(\ker A) \leq 2$ y su polinomio característico $p(\lambda)$ tiene la forma

$$p(\lambda) = \lambda^3 q(\lambda),$$

donde $q(\lambda)$ es un polinomio.

- Pruebe que $\dim(\ker A) \geq 1$ y que el rango de A es menor o igual a $n - 1$.
- Demuestre que A no es diagonalizable.