

Auxiliar 9: Álgebra Lineal

Profesor: Jaime Ortega P., Auxiliares: Orlando Rivera Letelier y Rodrigo Arce
Lunes 14 de Mayo de 2012

P1. Considere la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

y sea $\Psi : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mapsto M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ la transformación lineal cuya matriz representante respecto a la base canónica $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ es A .

- Determine la forma general de Ψ , es decir, encuentre la matriz $B = \Psi(A) \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, para cualquier $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
- Encuentre bases de $\ker(\Psi)$ e $\text{Im}(\Psi)$.

P2. Sea $\beta = \{1, x, x^2\}$ la base canónica del espacio vectorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Considere

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Encuentre la base $\tilde{\beta}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que Q sea representante de la identidad de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ con $\tilde{\beta}$ como base en $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ con β como base.
- Sea $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz representante con respecto a las bases β en $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ y canónica en $\mathbb{R}^3$ es la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz representante de T con respecto a las bases $\tilde{\beta}$ en $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ y canónica en $\mathbb{R}^3$, donde $\tilde{\beta}$ es la base encontrada en a).

P3. Sea $\mathcal{M}_{2 \times 2}^S(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices simétricas de 2×2 a coeficientes reales. Se define $T : \mathcal{M}_{2 \times 2}^S \mapsto \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ por:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\right) = c + (b + a)x + 2ax^2.$$

Considere además las bases $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ y $\beta' = \{1, x, x^2\}$.

- Calcular la matrix A representante de T respecto a estas bases (β y β').
- Encuentre la transformación lineal $S : \mathcal{M}_{2 \times 2}^S(\mathbb{R}) \mapsto \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ cuya matriz representante relativa a las bases β y β' es A^t .