Auxiliar 7: Álgebra Lineal

Profesor: Jaime Ortega P., Auxiliares: Orlando Rivera Letelier y Rodrigo Arce
Lunes 30 de Abril de 2012

Se denota por $\mathcal{P}_n$ el espacio vectorial de los polinomios a coeficientes en $\mathbb{R}$ de grado menor o igual a n. Este es un espacio vectorial de dimensión $n+1$, y una base de este espacio es $B_n = \left\{x^k / \ k \in \{0, 1, \dots, n\}\right\}$.

P1. Definimos:

$$W_1 = \left\{p \in \mathcal{P}_4 \ / \ p(1) + 2p(-1) = 0\right\}$$

$$W_2 = \left\{p \in \mathcal{P}_4 \ / \ p(x) = a + bx + cx^2 + bx^3 + ax^4, \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$$

a) Pruebe que W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de $\mathcal{P}_4$.

b) Encuentre una base de W_1 y W_2.

c) Encuentre una base de $W_1 \cap W_2$.

d) Calcule la dimensión de $W_1 + W_2$.

P2. *a)* Sea

$$V = \left\{p \in \mathcal{P}_3 \ / \ p(x) = q(x) \cdot (x^2 + 5) \quad \text{para algún polinomio a coef. reales } q\right\}.$$

1) Probar que V es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3$.
2) Calcular la dimensión de V y dar una base.
3) Probar que $V \oplus \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_3$.

b) Sea $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ y sea $W = \langle A \rangle$.

1) Extraiga de A una base de W.
2) Ortonormalice la base de la parte anterior.
3) Encuentre una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$ que contenga a la base de la parte anterior.

P3. Sea V un espacio vectorial, y sean A y B dos transformaciones lineales de V en si mismo, de modo que $A \circ A = B \circ B = 0$ y $A \circ B + B \circ A = I$

a) Probar que $\ker A = A(\ker B)$ y que $\ker B = B(\ker A)$.

b) Probar que $V = \ker A \oplus \ker B$.

c) Probar que la dimensión de V es un número par.

Indicación: Pruebe que $\ker A$ *y* $\ker B$ *tienen la misma dimensión.*

P4. Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por el siguiente conjunto de vectores

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

a) Determine una base de W y su dimensión.

b) Extienda la base encontrada a una base de $\mathbb{R}^4$.

c) Encuentre una base ortonormal de W y de $W^\perp$.

d) Encuentre la descomposición de $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $W + W^\perp$.