

Auxiliar 3: Álgebra Lineal

Profesor: Jaime Ortega P., Auxiliares: Orlando Rivera Letelier y Rodrigo Arce
Lunes 09 de Abril de 2012

P1. Sea A una matriz de $n \times n$ tal que para toda matriz X de $n \times n$ se cumple que $AX = XA$. Demuestre que $A = \lambda I$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.

P2. Sean A y B matrices de $n \times n$ tales que $AB = I$. Demuestre que A y B son invertibles y que $A^{-1} = B$.

P3. Sean

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

vectores no paralelos en $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Es decir, $u \neq \lambda v$ para cada $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pruebe que:

$$\{\tilde{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \tilde{x} \perp u, \tilde{x} \perp v\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

P4. Sean L_1 y L_2 los conjuntos solución de los sistemas

$$(L_1) \begin{cases} x + z = 1 \\ \alpha x + y + z = 0 \end{cases} \quad (L_2) \begin{cases} 2\alpha x + y + z = 1 \\ x + y + z + 2 = 0 \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

(a) Resuelva los sistemas (L_1) y (L_2) y decida para que valores de α los conjuntos L_1 y L_2 son rectas.

En adelante considere que L_1 y L_2 son rectas.

(b) Escriba ecuaciones vectoriales para L_1 y L_2

(c) Determine el valor de α para que L_1 y L_2 sean ortogonales y, para ese valor de α , verifique que $L_1 \cap L_2 = \emptyset$

P5. (a) Determine la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a la recta de ecuación:

$$L : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

y que pasa por el punto $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) Sean $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$ y $\vec{d} \neq 0$ en $\mathbb{R}^3$. Se define:

$$L = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (x - \vec{p}) \times \vec{d} = 0\}$$

Pruebe que $L = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = \vec{p} + \lambda \vec{d}, \lambda \in \mathbb{R}\}$