

Auxiliar 2: Álgebra Lineal

Profesor: Jaime Ortega P., Auxiliares: Orlando Rivera Letelier y Rodrigo Arce
Lunes 02 de Abril de 2012

P1. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rcccccccl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & (3-\alpha)x_4 & = & \alpha \\ x_1 & + & x_2 & & & + & (\beta+\alpha+3)x_4 & = & \beta \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 2\alpha+2\beta \end{array}$$

en las variables x_1, x_2, x_3 y x_4 , donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ son parámetros.

- (a) Determine los valores de α y β de modo que
- i) el sistema tenga una única solución,
 - ii) el sistema no tenga solución, y
 - iii) el sistema tenga infinitas soluciones.
- (b) Para $\alpha = -2$ y $\beta = 2$ encuentre el conjunto solución.

P2. (a) Sean A y B matrices de $n \times m$ a coeficientes reales. Pruebe que

$$A = B \iff \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^m \quad x^t A y = x^t B y$$

(b) Sean A y B matrices simétricas de $n \times n$ a coeficientes reales. Pruebe que

$$A = B \iff \forall x \in \mathbb{R}^n \quad x^t A x = x^t B x$$

P3. La matriz $U \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ se dice unitaria si $U^t U = I_n$.

- (a) Sean $U, U_1, U_2 \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ matrices unitarias. Pruebe que U es invertible y que su inversa $U^{-1} = U^t$ es unitaria. Pruebe además que $U_1 U_2$ es unitaria.
- (b) Sea $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $u^t u = 1$. Pruebe que $H = I_n - 2uu^t$ es unitaria.
- (c) Sea $\theta \in \mathbb{R}$ y $G(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. Pruebe que $G(\theta)$ es unitaria y que cualquiera sea $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ existe $\theta \in \mathbb{R}$ de modo que $[G(\theta) \cdot A]_{2,1} = 0$.
- (d) Sea $U \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ triangular superior y unitaria. Pruebe que U es diagonal y determine los valores de $\mathbb{R}$ que pueden tomar los coeficientes en la diagonal de U .

P4. (a) Determine si existe una matriz $M \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ de modo que para toda matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ se cumpla

$$M \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ a+c & d \end{bmatrix}$$

- (b) Pruebe que si $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ verifica que $A^2 + A + I = 0$ entonces es invertible.
- (c) Suponga que A y $B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ conmutan, es decir

$$AB = BA$$

Pruebe que

- i) $A^n B = B A^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
- ii) $A^t B^t = B^t A^t$, y
- iii) si además A y B son invertibles, entonces $A^{-1} B^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.