# Resumen números complejos

Auxiliares: Rodrigo Chi D. & Hugo Carrillo L.

**Def:** Sea $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Llamaremos $\mathbb{C}$ al conjunto de los números complejos, el cual está dotado de las operaciones $+$ y $\cdot$ definidas para todo $z = (z_1, z_2), w = (w_1, w_2) \in \mathbb{C}$ como:

$$z + w = (z_1 + w_1, z_2 + w_2)$$
$$z \cdot w = (z_1 w_1 - z_2 w_2, z_1 w_2 + z_2 w_1)$$

**Teo:** $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un cuerpo con neutros $(0,0)$ y $(1,0)$ para $+$ y $\cdot$ repectivamente.

**Notación:** Al complejo $z = (z_1, z_2)$ se le denota $z = z_1 + iz_2$, donde $i = (0,1)$.

**Obs:** Es útil notar que $i^2 = -1; \quad i^3 = -i; \quad i^4 = 1$.

**Prop:** En $\mathbb{C}$ se cumple que:

(i) $(z+w)^2 = z^2 + 2zw + w^2$

(ii) $(z+w)(z-w) = z^2 - w^2$

(iii) $\displaystyle\sum_{k=a}^{b} z^k = \frac{z^a - z^{b+1}}{1-z}$ si $z \neq 1$.

**Def:** Sea $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Se define su parte real y su parte imaginaria respectivamente como

$$\mathbb{R}\text{e}(z) = a$$
$$\mathbb{I}\text{m}(z) = b$$

**Prop:** Para $z, w \in \mathbb{C}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple:

*a)* $\mathbb{R}\text{e}(z+w) = \mathbb{R}\text{e}(z) + \mathbb{R}\text{e}(w)$

*b)* $\mathbb{I}\text{m}(z+w) = \mathbb{I}\text{m}(z) + \mathbb{I}\text{m}(w)$

*c)* $\mathbb{R}\text{e}(\alpha z) = \alpha \mathbb{R}\text{e}(z)$

*d)* $\mathbb{I}\text{m}(\alpha z) = \alpha \mathbb{I}\text{m}(z)$

*e)* $z = w \Leftrightarrow (\mathbb{R}\text{e}(z) = \mathbb{R}\text{e}(w) \wedge \mathbb{I}\text{m}(z) = \mathbb{I}\text{m}(w))$

**Def:** Sea $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Se define el conjugado de $z$ como $\bar{z} = a - ib$.

**Prop:** Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Se tiene:

*a)* $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

*b)* $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

*c)* $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$ si $w \neq 0$

*d)* $\bar{\bar{z}} = z$

*e)* $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$

*f)* $\mathbb{R}\text{e}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \mathbb{I}\text{m}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

**Def:** Sea $z = a + ib \in \mathbb{C}$. El módulo de $z$ es el valor $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

**Prop:** Para $z, w \in \mathbb{C}$ se tiene:

*a)* $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

*b)* $|z| = |\bar{z}|$

*c)* $|\mathbb{R}\text{e}(z)| \leq |z|, \quad |\mathbb{I}\text{m}(z)| \leq |z|$

*d)* $z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$

*e)* $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

*f)* $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ si $w \neq 0$

*g)* (Desigualdad triangular) $|z + w| \leq |z| + |w|$

**Def:** Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Se define el complejo $e^{i\theta}$ como

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

**Prop:**

*a)* $(\forall \theta \in \mathbb{R}) \quad |e^{i\theta}| = 1$

*b)* $(\forall \theta \in \mathbb{R}) \quad \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \quad \left(= e^{i(-\theta)}\right)$

*c)* $(\forall \theta, \varphi \in \mathbb{R}) \quad e^{i\theta} e^{i\varphi} = e^{i(\theta + \varphi)}$

*d)* $(\forall n \in \mathbb{Z})(\forall \theta \in \mathbb{R}) \quad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ (Fórmula de Moivre)

**Prop:** (Forma polar) Todo complejo $z$ se puede escribir de la forma $z = re^{i\theta}$, con $r \geq 0$ y $\theta \in \mathbb{R}$

**Def:** Si $z = re^{i\theta}$,

- Al valor $r$ se le llama módulo y se denota $|z|$.
- Al valor $\theta$ se le llama argumento, y se denota $\arg(z)$.

**Prop:** Sean $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

$$z = w \Leftrightarrow (|z| = |w| \wedge (\exists k \in \mathbb{Z}) \arg(z) = \arg(w) + 2k\pi)$$

**Def:** Sean $z \in \mathbb{C}$ y $n \geq 2$. Se dice que $z$ es una raíz $n$-ésima de la unidad si $z^n = 1$.
$z = e^{i\frac{2r\pi}{n}} \quad (r = 0, 1, ..., n-1)$.

**Def:** Sean $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $n \geq 2$. Diremos que $z$ es una raíz $n$-ésima de $w$ si $z^n = w$.
Escribiendo $w = Re^{i\phi}$, las raíces $n$-ésimas de $w$ son: $\quad z = \sqrt[n]{R} e^{i\frac{\phi + 2r\pi}{n}} \quad (r = 0, ..., n-1)$

**Prop:** Sea $n \geq 2$. La suma de las $n$ raíces $n$-ésimas de la unidad vale cero.