Problema Sumatorias

a) Demuestre sin usar inducción que

$$(x^2+2x+2)^n = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} \mathcal{C}_k^n \mathcal{C}_j^k 2^{n-j} x^{k+j}$$

SOL:

$$(x^2+2x+2)^n = (x(x+2)+2)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathcal{C}_k^n (x(x+2))^k 2^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \mathcal{C}_k^n x^k (x+2)^k 2^{n-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \mathcal{C}_k^n x^k (\sum_{j=0}^{k} \mathcal{C}_j^k x^j 2^{k-j}) 2^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} \mathcal{C}_k^n x^k \mathcal{C}_j^k x^j 2^{k-j} 2^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} \mathcal{C}_k^n \mathcal{C}_j^k 2^{n-j} x^{k+j} \ \blacksquare$$

b) Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{j}{2^j} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

SOL:

Probaremos el resultado por inducción sobre n.
Sea $p(n) : \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{j}{2^j} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$. Caso base, $n=1$: $p(1) \Leftrightarrow \displaystyle\sum_{j=1}^{1} \frac{j}{2^j} = 2 - \frac{1+2}{2^1}$
$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2^1} = 2 - \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow V$

La hipótesis de inducción (H.I.) es: $p(n)$ es verdadera para algún $n \in \mathbb{N}$. Probemos $p(n) \Rightarrow p(n+1)$.

$$\sum_{j=1}^{n+1} \frac{j}{2^j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{2^j} + \frac{n+1}{2^{n+1}} =^{(H.I.)} 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 + \frac{-2(n+2)+n+1}{2^{n+1}}$$
$$= 2 + \frac{-2n-4+n+1}{2^{n+1}} = 2 + \frac{-n-3}{2^{n+1}} = 2 - \frac{(n+1)+2}{2^{n+1}},$$

lo que equivale a $p(n+1)$. Por lo tanto, por inducción, se concluye $(\forall n \in \mathbb{N} \ \ p(n)) \Leftrightarrow V$ $\blacksquare$