

Problema Polinomios

Sea p un polinomio tal que el resto de dividirlo por $x - 1$ es 3 y el resto de dividirlo por $x - 2$ es 5. Encuentre el resto de dividirlo por $(x - 1)(x - 2)$.

SOL: Por el teorema de la división, sabemos que existen polinomios q_1, q_2 tales que:

$$p(x) = q_1(x)(x - 1) + 3 \wedge p(x) = q_2(x)(x - 2) + 5$$

Evalutando las ecuaciones anteriores en $x = 1$ y $x = 2$, obtenemos que $p(1) = 3$ y $p(2) = 5$ (resultado que es enunciado por el teorema del resto, que como pueden observar, es bastante prescindible).

Por el teorema de la división, el grado del resto r de dividir p por $(x - 1)(x - 2)$ debe ser menor estricto que el grado de $(x - 1)(x - 2)$, que es 2. Luego, el resto es de la forma

$$r(x) = a_0 + a_1x \quad (*)$$

(grado menor o igual a 1). Además, el teorema de la división asegura la existencia de un polinomio q_3 tal que

$$p(x) = q_3(x)(x - 1)(x - 2) + r(x)$$

de donde, al evaluar nuevamente en $x = 1$ y $x = 2$ en la ecuación anterior, se tiene que $r(1) = p(1) = 3$ y $r(2) = p(2) = 5$. Luego, para hallar a_0 y a_1 basta con resolver el sistema de ecuaciones que se obtiene al evaluar en los mismos valores anteriores r en la ecuación (*):

$$3 = a_0 + a_1$$

$$5 = a_0 + 2a_1$$

Cuya solución es $a_0 = 1, a_1 = 2$. Luego, el resto que buscamos es $r(x) = 1 + 2x$.