

PAUTA TUTORÍA #4: EXAMEN!
MAMON

Hecha por: S. Espinosa, G. Liberona

seba-sp10@hotmail.com
gliberona@dim.uchile.cl

P11

Como $p(0) = p(2) = 0 \Rightarrow 0$ y 2 son raíces de p , y en virtud del teo. del resto

$\Rightarrow p$ es divisible por $(x-0)$
y por $(x-2)$.

Esto nos permite concluir que $p(x) = (x-0)(x-2)q(x)$
 $= x(x-2)q(x)$, con $\text{gr}(q) = 1$.

Esto último sale de que $\text{gr}(p) = 3$. Además, como p es mónico, q debe ser mónico también.

$\Rightarrow q(x) = x + \alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ por determinar.

Finalmente, nuevamente el teo. del resto nos permite ver que, si el resto de $p(x) : (x-1)$ es igual al resto de $p(x) : (x-3)$

$$\Rightarrow p(1) = p(3) \Leftrightarrow 1 \cdot (1-2) \cdot (1+\alpha) = 3 \cdot (3-2) \cdot (3+\alpha)$$

$$\Leftrightarrow 1 \cdot (-1) \cdot (1+\alpha) = 3 \cdot 1 \cdot (3+\alpha)$$

$$\Leftrightarrow -1 - \alpha = 9 + 3\alpha \Leftrightarrow -10 = 4\alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = -\frac{5}{2}}$$

Así, el polinomio es $p(x) = x(x-2)(x-\frac{5}{2})$
 $= (x^2 - 2x)(x - \frac{5}{2})$

$$\therefore \boxed{p(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 5x} //$$

P2

(a) Como el polinomio es mónico y a coeficientes enteros, cualquier raíz racional que tenga p DEBE dividir al coef. libre de p , en este caso 1.

Así, tenemos como candidatos a 1 y -1. Luego se puede chequear, por inspección que ambos son efectivamente raíces de p ; dividiendo por $(x-1)$, $(x+1)$ y encontrando los restos.

Otro camino igual de válido (y en muchas ocasiones más conveniente) consiste en analizar un poco el polinomio en cuestión e intentar factorizarlo. Haciendo esto aquí, tenemos que:

$$\begin{aligned} p(x) &= x^4 + 4x^3 - 4x - 1 \\ &= (x^4 - 1) + 4x^3 - 4x \\ &= (x^2 - 1)(x^2 + 1) + 4x(x^2 - 1) \\ &= (x^2 - 1)(x^2 + 4x + 1) \\ &= (x - 1)(x + 1)(x^2 + 4x + 1), \end{aligned}$$

y los raíces que faltan salen de resolver $x^2 + 4x + 1 = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} \\ &= \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} \\ &= -2 \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

$\therefore$ las raíces de p son 1, -1, $-2 + \sqrt{3}$ y $-2 - \sqrt{3}$.

(b) Para probar lo pedido, veremos que las raíces de g son también raíces de p . Esto nos permite concluir a través del teo. del resto, que g divide a p .

Dicho esto, resolvamos la ecuación $g(x) = 0$ para encontrar las raíces de g :

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Las raíces de } g \text{ son: } \begin{cases} x_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ x_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \bar{x}_1 \text{ (conjugado)} \end{cases}$$

Veamos ahora que:

$$\begin{aligned} p(x_1) &= (x_1)^{3n} + (x_1)^{3m+1} + (x_1)^{3k+2} \\ &= \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{3n} + \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{3m+1} + \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{3k+2} \\ &= \cancel{e^{i\frac{2\pi}{3}n}} + \cancel{e^{i\frac{2\pi}{3}m}} e^{i\frac{2\pi}{3}} + \cancel{e^{i\frac{2\pi}{3}k}} e^{i\frac{4\pi}{3}} \\ &= 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^2 \end{aligned}$$

$$= 1 + x_1 + x_1^2 = g(x_1) = 0 \Rightarrow x_1 \text{ es raíz de } p.$$

Además, como $p \in \mathbb{R}[x]$ y x_1 es raíz $\Rightarrow x_2 = \bar{x}_1$ también lo es!

Así, como x_1 y x_2 son raíces de p ; $(x - x_1)(x - x_2) = g(x)$ divide al polinomio p , tal como queríamos probar. //

P3

Usamos la propiedad compacta para probar lo pedido:

- * Como φ es morfismo, debe enviar al neutro de la partida en el neutro de la llegada

$$\Rightarrow \varphi(e) = e, \therefore e \in F_\varphi \Rightarrow F_\varphi \neq \emptyset.$$

- * Sean $a, b \in F_\varphi$, vale decir, tales que $\varphi(a) = a, \varphi(b) = b$.
Como φ es morfismo,

$$\Rightarrow b^{-1} = (\varphi(b))^{-1} = \varphi(b^{-1}).$$

y finalmente,

$$\begin{aligned} a * b^{-1} &= \varphi(a) * (\varphi(b))^{-1} \\ &= \varphi(a) * \varphi(b^{-1}) \end{aligned}$$

$$\text{Morfismo!} \rightarrow = \varphi(a * b^{-1}) \Rightarrow a * b^{-1} \in F_\varphi.$$

Todo lo anterior nos permite concluir que $(F_\varphi, *)$ es subgrupo de $(G, *)$.

P47

Reescribimos S de la forma:

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{1+i} \right)^k \xrightarrow{\text{geométrica!}} \frac{1 - \left(\frac{1}{1+i} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{1+i}} \\
 &= \frac{(1+i)^{n+1} - 1}{(1+i)^{n+1}} \\
 &= \frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i(1+i)^n} = \frac{(1+i)^{n+1}}{i(1+i)^n} - \frac{1}{i(1+i)^n} \\
 &= \frac{1}{i} \left(1+i - \frac{1}{(1+i)^n} \right)
 \end{aligned}$$

Definimos $z = 1+i \Rightarrow |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \therefore z = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$

$$= \sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{i} \left(z - \frac{1}{z^n} \right) = \frac{1}{i} \left(z - z^{-n} \right)$$

Moivre! $\rightarrow = \frac{1}{i} \left(\sqrt{2} e^{i\pi/4} - 2^{-n/2} e^{-in\pi/4} \right) \cdot \frac{i}{i}$

$$= -i \left(\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right) - \frac{1}{2^{n/2}} \left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right) \right)$$

y reagrupando términos se encuentra:

$$S = \underbrace{\left(\frac{1}{2^{n/2}} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + 1 \right)}_{=a} + i \underbrace{\left(\frac{1}{2^{n/2}} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - 1 \right)}_{=b.//}$$

P5: γ términos en primer lugar que el coef. $\frac{1}{k+1}$ nos impide usar Newton. Veamos entonces que:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} \cdot \frac{(n+1)}{(n+1)} \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n+1} \\ &= \binom{n+1}{k+1} \cdot \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} &= \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} \frac{(-1)^k}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} (-1)^k \end{aligned}$$

Trasladar índices! $\rightarrow = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{k-1}$

$$= \frac{-1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k$$

Agregan término $k=0 \rightarrow = \frac{-1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k \cdot 1^{n+1-k} ; -1 \right)$

Newton! $\rightarrow = \frac{-1}{n+1} \left((1-1)^{n+1} - 1 \right)$

$$= \frac{1}{n+1}, \text{ tal como queríamos ver!}$$

¡A romperla mañana!

[Signature]
12-07-2012