

PAUTA CLASE AUXILIAR EXTRA: EXAMEN!

MAM01 - SECCIONES 2 y 6

Hecha por: Sebastián Espinosa
Gianfranco Liberona

seba-espio@hotmail.com
gliberona@dim.uchile.cl

P1

Problemas directamente la equivalencia, notando que:

$$r \text{ es raíz de } p(x) \Leftrightarrow p(r) = 0$$

$$\Leftrightarrow p(r + (-a + a)) = 0$$

$$\Leftrightarrow p((r-a) + a) = 0$$

$$\Leftrightarrow q(r-a) = 0$$

$$\Leftrightarrow r-a \text{ es raíz de } q(x) = p(x+a) //$$

P3

siguiendo la indicación, estudiemos la parte real e imaginaria del polinomio evaluado en $z=a$

$$\rightarrow p(a) = 2a^3 - (5+6i)a^2 + 9ia + 1-3i$$

$$= (2a^3 - 5a^2 + 1) - i(6a^2 - 9a + 3)$$

$$\text{Luego, } p(a) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(p(a)) = 0 \wedge \operatorname{Im}(p(a)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{2a^3 - 5a^2 + 1 = 0}_{(1)} \wedge \underbrace{6a^2 - 9a + 3 = 0}_{(2)}$$

De la ecuación (2), veamos que identificando $a=6$, $b=-9$, $c=3$

$$\Rightarrow a = \frac{9 \pm \sqrt{81-72}}{12} = \frac{9 \pm 3}{12} = \frac{3 \pm 1}{4} \rightarrow \boxed{a_1 = 1 \vee a_2 = \frac{1}{2}}$$

Notemos que la solución final debe ser solución de (1) también.

Evaluando, se observa que sólo nos sirve $\boxed{a = \frac{1}{2}}$.

Para encontrar los raíces restantes, dividamos $p(z)$ por $(z - \frac{1}{2})$:

$$\begin{array}{r}
 \cancel{2z^3} - (5+6i)z^2 + 9iz + 1-3i \\
 - (2z^3 - z^2) \\
 \hline
 - (4+6i)z^2 + 9iz \\
 - (-(4+6i)z^2 + (2+3i)z) \\
 \hline
 (6i-2)z + 1-3i \\
 - ((6i-2)z^2 + 3i+1) \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$\Rightarrow p(z) = (z - \frac{1}{2}) \underbrace{\left(2z^2 - (4+6i)z + 6i-2 \right)}_{=q(x)}$$

y busquemos las raíces de q identificando $a=2$, $b=-(4+6i)$, $c=6i-2$.

$$\Rightarrow z = \frac{4+6i \pm \sqrt{(4+6i)^2 - 4 \cdot 2(6i-2)}}{4}$$

$$= \frac{4+6i \pm \sqrt{16-36+48i-8(6i-2)}}{4}$$

$$= \frac{4+6i \pm \sqrt{16-36+48i-48i+16}}{4} = \frac{4+6i \pm \sqrt{-4}}{4}$$

$$= \frac{4+6i \pm 2i}{4}$$

$\Rightarrow$ Las raíces restantes son $a_2 = 1+2i$, $a_3 = 1-i$.

P5

(a) Es claro que $\oplus$ es una lci, puesto que cada una de sus coordenadas lo es ($+_2$ y $+_3$). Luego, vemos los demás casos necesarios:

• Asociatividad: Sean $(a,b), (c,d), (e,f) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$, luego

$$\begin{aligned} ((a,b) \oplus (c,d)) \oplus (e,f) &= (a+_2c, b+_3d) \oplus (e,f) \\ &= ((a+_2c) +_2e, (b+_3d) +_3f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{asoc. de } +_2, +_3 \rightarrow &= (a+_2(c+_2e), b+_3(d+_3f)) \\ &= (a,b) \oplus (c+_2e, d+_3f) \\ &= (a,b) \oplus ((c,d) \oplus (e,f)) // \end{aligned}$$

• Neutro: Basta con proponer a $(e_1, e_2) = (0, 0)$.
En efecto:

$$\left. \begin{aligned} (a,b) \oplus (0,0) &= (a+_20, b+_30) \\ &= (a,b) \\ &= (0+_2a, 0+_3b) \\ &= (0,0) \oplus (a,b) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} (a,b) \oplus (0,0) &= (a,b) \\ (0,0) \oplus (a,b) &= (a,b) // \end{aligned}$$

• Inversos: Análogamente, proponemos $(a,b)^{-1} = (-a, -b)$.
Entonces:

$$\left. \begin{aligned} (a,b) \oplus (-a,-b) &= (a+_2(-a), b+_3(-b)) \\ &= (0,0) \\ &= (-a+_2a, -b+_3b) \\ &= (-a,-b) \oplus (a,b) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} (a,b) \oplus (-a,-b) &= (0,0) \\ (-a,-b) \oplus (a,b) &= (0,0) // \end{aligned}$$

Con todo esto, concluimos que $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus)$ es un grupo. //

(b) Suponemos que $f([1]_6) = ([1]_2, [1]_3)$. Luego, los demás valores de f deben cumplir:

monfismo! $\oplus$

$$\begin{aligned} \bullet f(2_6) &= f(1_6 + 1_6) \stackrel{\downarrow}{=} f(1_6) \oplus f(1_6) \\ &= (1, 1) \oplus (1, 1) = (1+2, 1+3) = (0, 2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet f(3_6) &= f(1_6 + 2_6) \stackrel{\oplus}{=} f(1_6) \oplus f(2_6) \\ &= (1, 1) \oplus (0, 2) = (1+0, 1+2) = (1, 0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet f(4_6) &= f(1_6 + 3_6) \stackrel{\oplus}{=} f(1_6) \oplus f(3_6) \\ &= (1, 1) \oplus (1, 0) = (1+1, 1+0) = (0, 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet f(5_6) &= f(1_6 + 4_6) = f(1_6) \oplus f(4_6) \\ &= (1, 1) \oplus (0, 1) = (1+0, 1+1) = (1, 2). \end{aligned}$$

$$\bullet f(6_6) = f(0_6) \stackrel{\oplus}{=} (0_2, 0_3). //$$

La unidad sale por la construcción, porque cualquier monfismo que cumpla la condición impuesta deberá tomar los valores ya indicados con los demás puntos. //

P7

Aprovechanemos el hecho de que $(-1)^k = 1$ si k es par, y $(-1)^k = -1$ cuando k es impar; de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{(3+(-1)^k)^k} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(3+1)^{2k}} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(3+(-1)^{2k-1})^{2k-1}} \\
 &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{4}\right)^{2k} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} \\
 &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{16}\right)^k + \sum_{k=1}^n 2\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \\
 &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{16}\right)^k + 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{4}\right)^k \\
 &= \left(\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{16}\right)^k - 1 \right) + 2 \left(\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{4}\right)^k - 1 \right)
 \end{aligned}$$

Sumas geométricas! $\rightarrow = \frac{1 - (1/16)^{n+1}}{1 - 1/16} + 2 \left(\frac{1 - (1/4)^{n+1}}{1 - 1/4} \right) - 3$

Trabajo algebraico! $\rightarrow = \frac{16}{15} (1 - (1/16)^{n+1}) + \frac{8}{3} (1 - (1/4)^{n+1}) - 3 //$

Pg. 1

Notemos que se podría aplicar binomio de Newton, de no ser por el coeficiente $\frac{1}{k+1}$ que está acompañando a x^k .

Para solucionar esto, veamos que:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} \cdot \frac{(n+1)}{(n+1)} \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n+1} \\ &= \binom{n+1}{k+1} \cdot \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{x^k}{k+1} &= \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} \frac{x^k}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} x^k \end{aligned}$$

Trasladan índice! $\rightarrow = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{k-1}$

Factorizan por $\frac{1}{x}$ $\rightarrow = \frac{1}{x(n+1)} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k$

Agregan término $k=0$ $\rightarrow = \frac{1}{x(n+1)} \left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k \right) - \binom{n+1}{0}$

Newton! $\rightarrow = \frac{1}{x(n+1)} \left((1+x)^{n+1} - \frac{(n+1)!}{0!(n+1)!} \right)$

$$= \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{x(n+1)} //$$

PM

(a) Sabemos que la función $g(x) = x+1$ es claramente biyectiva; en efecto:

• Injectividad: Sean x_1, x_2 tales que $f(x_1) = f(x_2)$

$$\Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$\Rightarrow f$ inyectiva //

• Sobreyectividad: Sea $c \in \mathbb{R}$ cualquiera, busquemos $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = c$.

$$\text{Basta elegir } x = c-1 \Rightarrow f(x) = (c-1)+1 = c.$$

Como esto vale $\forall c \in \mathbb{R}$, f es sobreyectiva //

Luego, como $f \circ f(x) = g(x) \Rightarrow f \circ f = g \Rightarrow f \circ f$ es biyectiva.

Recordando entonces que $f_1 \circ f_2$ biyectiva $\Rightarrow f_1$ sobreyectiva, f_2 inyectiva,

notamos que en nuestro caso $f_1 = f_2 = f$; por lo que

$\Rightarrow f$ es inyectiva y sobreyectiva,

de donde concluimos que f es biyectiva.

(b) Si f fuera un morfismo, debería cumplir $f(0) = 0$.

Esto a su vez implicaría que; al volver a aplicar $f(1)$

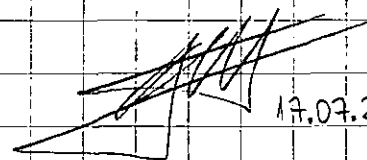
$$\Rightarrow f(f(1)) = f(0) \Leftrightarrow f \circ f(1) = 0,$$

lo que constituye una contradicción, puesto que:

$$f \circ f(1) = 0 + 1 = 1 \quad \neq$$

Luego, nuestro supuesto original es falso, lo que implica que f NO es un morfismo //

¡Mucho éxito mañana!



17.07.2012.

MA1101 - Introducción al Álgebra: Semestre 2012-01**Profesores:** José Soto, María Leonor Varas**Auxiliares:** Gianfranco Liberona, Sebastián Espinosa**Pauta Auxiliar Extra/Maratón: Preparación Exámen (Pares)**

P2. Para resolver este problema debemos considerar la única ayuda que se nos otorga y es que se sabe que el módulo de una de ellas es 2, dado que el polinomio tiene solamente coeficientes reales si determinamos una raíz, digamos c , entonces su conjugado, $\bar{c}$, también será raíz, más aún, también se tendrá que $c\bar{c} = |c|^2 = 4$, luego:

$$\begin{aligned}
 p(c) &= c^4 - 4c^3 + 10c^2 - 12c + 8 \quad // \text{ se multiplica por } \bar{c}^2 \\
 0 &= c^2 c^2 \bar{c}^2 - 4c c^2 \bar{c}^2 + 10c^2 \bar{c}^2 - 12c \bar{c} \bar{c} + 8\bar{c}^2 \\
 0 &= c^2 |c|^4 - 4c |c|^4 + 10|c|^4 - 12\bar{c} |c|^2 + 8\bar{c}^2 \\
 0 &= 16c^2 - 64c + 160 - 48\bar{c} + 8\bar{c}^2 \\
 0 &= 2c^2 - 8c + 20 - 6\bar{c} + \bar{c}^2
 \end{aligned}$$

Como c es complejo se puede representar de la forma $a + ib$, con a y b por determinar, recordemos además que $c^2 = a^2 - b^2 + 2aib$ y que para cualquier complejo $z + \bar{z} = 2\text{Re}\{z\}$, luego, reagrupando:

$$\begin{aligned}
 0 &= c^2 + c^2 + \bar{c}^2 - 2c - 6c - 6\bar{c} + 20 \\
 0 &= c^2 + 2\text{Re}\{c^2\} - 2c - 12\text{Re}\{c\} + 20 \\
 0 &= a^2 - b^2 + 2aib + 2a^2 - 2b^2 - 2a - 2ib - 12a + 20 \\
 0 &= \underbrace{3a^2 - 3b^2 - 14a + 20}_{(1)} + \underbrace{2aib - 2ib}_{(2)}
 \end{aligned}$$

Dado que la ecuación debe valer 0, esto se logra si tanto parte real (1) e imaginaria (2) valen 0, por lo tanto de (2):

$$2aib - 2ib = 0 \Rightarrow a = 1 \quad // \text{ con } b \neq 0 \text{ ya que las raíces son complejas, luego de (1):}$$

$$3 \cdot 1^2 - 3b^2 - 14 \cdot 1 + 20 = 0 \Rightarrow b = \pm\sqrt{3} \quad // \text{ son 2 porque una es la raíz } c \text{ y la otra } \bar{c}$$

Con esto ya tenemos dos raíces $c = 1 + \sqrt{3}$ y $\bar{c} = 1 - \sqrt{3}$, para determinar las dos restantes, basta ocupar teorema de la división y teorema fundamental del álgebra, en efecto, $p(z)$ se puede descomponer en:

$$(z - c)(z - \bar{c})q(z) = p(z)$$

Con esto $q(z)$ queda:

$$q(z) = \frac{p(z)}{(z - c)(z - \bar{c})} = \frac{z^4 - 4z^3 + 10z^2 - 12z + 8}{z^2 - 2z + 4} = z^2 - 2z + 2$$

Finalmente basta encontrar las raíces de $q(z)$ pero eso se puede hacer directamente con la fórmula cuadrática, luego las raíces serán: $m = 1 + i$ y $\bar{m} = 1 - i$, resumiendo el polinomio con sus respectivas raíces queda:

$$\left. \begin{array}{l} c = 1 + \sqrt{3} \\ \bar{c} = 1 - \sqrt{3} \\ m = 1 + i \\ \bar{m} = 1 - i \end{array} \right\} (z - c)(z - \bar{c})(z - m)(z - \bar{m}) = z^4 - 4z^3 + 10z^2 - 12z + 8 = p(z)$$

- P4. (a)** El polinomio $p(x)$ puede ser escrito como una sumatoria, dónde los coeficientes corresponden a las raíces n-ésimas de la unidad, de esta forma el polinomio queda:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2k\pi i}{n}} x^k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2\pi i}{n}} x\right)^k = \frac{1 - \left(e^{\frac{2\pi i}{n}} x\right)^n}{1 - e^{\frac{2\pi i}{n}} x} = \frac{1 - x^n}{1 - e^{\frac{2\pi i}{n}} x}$$

Ojo que esta suma necesariamente para que tenga validez tiene que ocurrir que $1 - e^{\frac{2\pi i}{n}} x \neq 0$, lo que es lo mismo a decir que $x \neq e^{\frac{-2\pi i}{n}} = w_{n-1}$. Con esta restricción basta determinar los ceros de esta función (las raíces del polinomio original) cuyo resultado es:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1 - x^n}{1 - e^{\frac{2\pi i}{n}} x} \\ 0 &= 1 - x^n \\ x^n &= 1 \end{aligned}$$

Es decir las raíces n-ésimas de la unidad ($w_0, w_1, \dots, w_{n-2}$) son las raíces del polinomio original excluyendo a w_{n-1} por lo previamente dicho.

- (b)** Cuando no tenemos información extra sobre el polinomio solamente nos queda ocupar el ojómetro para factorizar y encontrar las raíces. Luego:

$$\begin{aligned} p(x) &= 1 + ix - x^2 - ix^3 \\ p(x) &= (1 + ix) - x^2(1 + ix) \\ p(x) &= (1 + ix)(1 - x^2) \\ p(x) &= (1 + ix)(1 - x)(1 + x) \end{aligned}$$

- P6. (a) $\Rightarrow$** Hay que demostrar igualdad de conjuntos, o una equivalencia entre un elemento arbitrario de un conjunto con otro elemento arbitrario del otro conjunto sabiendo que $x \in H$, en efecto, sea $h_1 \in H$:

$$\begin{aligned} h_1 &= e * h_1 \quad // \text{operando con el neutro, que es único y el mismo para } G \text{ y } H \\ &= x * x^{-1} * h_1 \quad // \text{transformando el neutro en la operación con inversos} \end{aligned}$$

Luego por ley de composición interna $(x^{-1} * h_1) \in H$, llamemos $(x^{-1} * h_1) = h_2$, con esto, $h_1 = x * h_2$ y como $x * h_2 \in x * H$ (por definición del conjunto $x * H$) se tiene que $h_1 \in x * H$.

$\Leftrightarrow$) En este caso nuestra hipótesis es la igualdad de conjuntos, los elementos de $x * H$ son iguales a los elementos de H , ahora, tomemos un elemento de H digamos h_1 , éste a su vez puede ser representado como $x * h_2$ porque vive en $x * H$ (igualdad de conjuntos), luego, operando se tiene que:

$$\begin{aligned} h_1 &= x * h_2 \\ h_1 * h_2^{-1} &= x \quad // \text{ operando con } h_2^{-1} \text{ por la derecha} \end{aligned}$$

dado que $h_1 \in H$ y $h_2 \in H$ con esto se deduce que $x \in H$, por la caracterización de subgrupo.

(b) Razonemos por contradicción, supongamos que la intersección de ambos conjuntos es no vacío, es decir, existe al menos un elemento común para ambos, llamémoslo h_3 , luego se tiene (análogo al caso anterior):

$$\begin{aligned} h_3 &= y * h_4 \\ h_1 * h_4^{-1} &= y \quad // \text{ operando con } h_4^{-1} \text{ por la derecha} \end{aligned}$$

dado que $h_3 \in H$ y $h_4 \in H$ se tiene, por la caracterización de subgrupo, que $h_3 * h_4^{-1} \in H$, sin embargo por hipótesis $y \notin H$, lo cual es una contradicción.

P8. Analizemos la sumatoria:

$$S = \left(\frac{1}{1} - \frac{2}{1} \right) + \left(\frac{2}{1+2} - \frac{2}{2} \right) + \left(\frac{3}{1+2+3} - \frac{2}{3} \right) + \dots + \left(\frac{\overbrace{n}^a}{\underbrace{1+2+3+\dots+n}_b} - \frac{\overbrace{2}^c}{\underbrace{n}_d} \right)$$

Dentro de cada término en S , podemos identificar dos sub-términos que se restan, a su vez, cada fracción tiene otros dos sub-términos que tienen cierta regularidad. Es así como se obtiene lo siguiente:

- Se tiene que para el primer término en S , $a = 1$ y $d = 1$, para el segundo, $a = 2$ y $d = 2$, entonces para el k -ésimo te tendrá $a = k$ y $d = k$,
- $c = 2$ es constante para cualquier término en S
- En el caso de b se tiene que:
 - Para el primer término $b = 1$
 - Para el segundo término $b = 1 + 2$
 - Para el tercer término $b = 1 + 2 + 3$
 - $\vdots$

- Para el k-ésimo término $b = 1 + 2 + 3 + \dots + k = \sum_{j=1}^k j$

La suma entonces queda como sigue:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{\sum_{j=1}^k j} - \frac{2}{k} \right) \\
 &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{\frac{k(k+1)}{2}} - \frac{2}{k} \right) // \text{ suma conocida} \\
 &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{k+1} - \frac{2}{k} \right) // \text{ esto corresponde a una telescópica} \\
 &= \frac{2}{n+1} - 2
 \end{aligned}$$

P10. (a) Hay que ver que la relación $\mathcal{R}$ es refleja, simétrica y transitiva:

- Refleja: Sea $a \in E$, se sabe que ρ es refleja, y el conectivo lógico $\wedge$ es idempotente, luego:

$$a\mathcal{R}a \iff apa \wedge apa \iff apa \iff V$$

- Simétrica: Sea $a, b \in E$ tales que $a\mathcal{R}b$, como $\wedge$ es conmutativo se tiene que:

$$a\mathcal{R}b \iff apb \wedge bpa \iff bpa \wedge apb \iff b\mathcal{R}a$$

- Transitiva: Sea $a, b, c \in E$ tales que $a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c$, entonces se tiene que:

$$a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c \iff (apb \wedge bpa) \wedge (bpc \wedge cpb)$$

Pero ρ es transitiva, lo que se traduce en:

$$(apb \wedge bpa) \wedge (bpc \wedge cpb) \iff (apb \wedge bpc) \wedge (cpb \wedge bpa) \iff (apc \wedge cpa) \iff a\mathcal{R}c$$

(b) Ahora hay que probar que Ω es refleja, antisimétrica y transitiva

- Refleja: Sea $[a]_{\mathcal{R}} \in E/\mathcal{R}$, como ρ es refleja, se tiene que:

$$[a]_{\mathcal{R}}\Omega[a]_{\mathcal{R}} \iff apa \iff V$$

- Antisimétrica: Sea $[a]_{\mathcal{R}}, [b]_{\mathcal{R}} \in E/\mathcal{R}$, con esto se tiene que:

$$[a]_{\mathcal{R}}\Omega[b]_{\mathcal{R}} \wedge [b]_{\mathcal{R}}\Omega[a]_{\mathcal{R}} \iff apb \wedge bpa \iff a\mathcal{R}b \implies [a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$$

Lo anterior se debe a que si dos elementos están relacionados entonces sus clases de equivalencia son iguales

- Transitiva: Sea $[a]_{\mathcal{R}}, [b]_{\mathcal{R}}, [c]_{\mathcal{R}} \in E/\mathcal{R}$, como ρ es transitiva entonces se tiene que:

$$[a]_{\mathcal{R}}\Omega[b]_{\mathcal{R}} \wedge [b]_{\mathcal{R}}\Omega[c]_{\mathcal{R}} \iff apb \wedge bpc \iff apc \iff [a]_{\mathcal{R}}\Omega[c]_{\mathcal{R}}$$

- P12.**
- Caso base ($n = 1$): $3^{2 \cdot 1 + 1} + 2^{1+2} = 35$ que es divisible por 7
 - Hipótesis inductiva: Supongamos que esto es cierto hasta un cierto n , lo que es igual a decir que:

$$3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7k \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Ahora debemos demostrar que esto es cierto para $n + 1$, en efecto:

$$\begin{aligned}
 3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} &= 3^{2n+3} + 2^{n+3} \\
 &= 3^{2n+1} \cdot 9 + 2^{n+2} \cdot 2 \\
 &= 3^{2n+1} \cdot (7 + 2) + 2^{n+2} \cdot 2 \\
 &= 3^{2n+1} \cdot 7 + 3^{2n+1} \cdot 2 + 2^{n+2} \cdot 2 \\
 &= 3^{2n+1} \cdot 7 + 2 \underbrace{(3^{2n+1} + 2^{n+2})} \\
 &= 3^{2n+1} \cdot 7 + 2 \cdot 7k \quad // \text{usamos nuestra hipótesis inductiva} \\
 &= 7(3^{2n+1} + 2k) \\
 &= 7p \quad \text{con } p \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Con esto se verifica que $3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2}$ es divisible por 7 con lo cual concluimos la demostración.

Cualquier duda o consulta a nuestros correos
seba-spio@hotmail.com, gliberona@dim.uchile.cl
 MUCHA SUERTE Y ÉXITO EN EL EXÁMEN!!!! =)