Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1101 Introducción al Álgebra
17 de Julio de 2012

Clase Auxiliar Extra/Maratón: Preparación Examen

Profesores: María Leonor Varas, José Soto.
Auxiliares: Sebastián Espinosa, Gianfranco Liberona.

P1. **(P2(b) Examen, Año 2011)** Sea $p(x)$ un polinomio de grado mayor o igual a 1 y $a \in \mathbb{R}$. Demuestre que r es una raíz de $p(x)$ si y sólo si $(r-a)$ es raíz de $q(x) = p(x+a)$.

P2. Sabiendo que el polinomio

$$p(z) = z^4 - 4z^3 + 10z^2 - 12z + 8$$

posee sólo raíces complejas y que una de ellas tiene módulo 2, encuentre todas las raíces del polinomio.

P3. **(P6 Examen 2^a Instancia, Año 2008)** Sabiendo que el polinomio $p \in \mathbb{C}[x]$ dado por

$$p(z) = 2z^3 - (5+6i)z^2 + 9iz + 1 - 3i$$

admite una raíz $a \in \mathbb{R}$, determine **todas** las raíces de p.
Hint: *Estudie la parte real e imaginaria de $p(a)$.*

P4. **(P3(a) Control Recuperativo, Año 1997)**

(a) Sea $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, y $\forall k \in \{0, \ldots, n-1\}$ considere la raíz $n-$ésima de la unidad $\omega_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$. Sea el polinomio

$$p(x) = \omega_0 + \omega_1 x + \ldots + \omega_{n-1} x^{n-1}.$$

Pruebe que las raíces de $p(x)$ son $\omega_0, \ldots, \omega_{n-2}$.

(b) Factorice en producto de polinomios de grado 1 en $\mathbb{C}[x]$ el polinomio

$$p(x) = 1 + ix - x^2 - ix^3.$$

P5. **(P2(ii) Control 3, Año 1996)** Considere $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ con la operación definida por

$$(a,b) \oplus (c,d) = (a +_2 c, b +_3 d).$$

(a) Pruebe que $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus)$ es un grupo.

(b) Construya un isomorfismo

$$f \ : \ (\mathbb{Z}_6, +_6) \to (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus),$$

tal que $f([1]_6) = ([1]_2, [1]_3)$, y concluya que es único.

P6. **(P2(b) Examen, Año 2010)** Sea $(G, *)$ un grupo, y sea $(H, *)$ un subgrupo de $(G, *)$. La traslación izquierda de H en G con respecto a un $x \in G$ dado se define como

$$x * H = \{x * h \ : \ h \in H\}.$$

Pruebe que:

(a) Para cada $x \in G$ se tiene que: $x \in H \iff x * H = H$.

(b) Para cada $y \in G \setminus H$ se tiene que: $(y * H) \cap H = \varnothing$.

P7. (P3(b) Examen, Año 2011) Sea $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Calcule la sumatoria:

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{(3+(-1)^k)^k}.$$

P8. Considere la suma

$$S = \left(\frac{1}{1} - \frac{2}{1}\right) + \left(\frac{2}{1+2} - \frac{2}{2}\right) + \left(\frac{3}{1+2+3} - \frac{2}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{n}{1+2+3+\ldots+n} - \frac{2}{n}\right).$$

Escriba S en función de dos sumatorias, y calcule su valor.

P9. (P3(ii) Examen 2^a Instancia, Año 2008) Dado $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, calcula la sumatoria

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k}{k+1}.$$

P10. (P2 Examen, Año 2008) Sea $E \neq \varnothing$ un conjunto y ρ una relación sobre E refleja y transitiva. Se define una nueva relación $\mathcal{R}$ sobre E como:

$$a\mathcal{R}b \iff (a\rho b \wedge b\rho a).$$

(a) Pruebe que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

(b) Se define la relación Ω sobre $E/\mathcal{R}$ (conjunto cuociente de E inducido por $\mathcal{R}$) por

$$[a]_{\mathcal{R}}\Omega[b]_{\mathcal{R}} \iff a\rho b.$$

Pruebe que Ω es una relación de orden en $E/\mathcal{R}$.

P11. (P2(b) Control Recuperativo, Año 1996) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que verifica para cada $x \in \mathbb{R}$ que $f \circ f(x) = x + 1$.

(a) Pruebe que f es una función biyectiva.

(b) Muestre que f **no** es un morfismo de $(\mathbb{R}, +)$ sobre sí mismo.

P12. Demuestre usando inducción que, $\forall n \geq 1$, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ es divisible por 7.