

P11

Caso base: $n=1$.

Como p es impar distinta de 1, se tiene que $p=2k+1$ con $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Luego

$$p^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

$$\Rightarrow p^2 - 1 = 4k(k+1)$$

Se observa que $k(k+1)$ es siempre par $\forall k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $p^2 - 1$ es divisible por $8 = 2^{1+2}$.

Paso Inductivo:

H.I. $p^{2^n} - 1$ es divisible por 2^{n+2}

Se quiere mostrar que $p^{2^{n+1}} - 1$ es divisible por 2^{n+1+2} .

$$p^{2^{n+1}} - 1 = (p^{2^n})^2 - 1 = \underbrace{(p^{2^n} - 1)}_{\substack{\text{divisible} \\ \text{por } 2^{n+2} \text{ por} \\ \text{H.I.}}} \underbrace{(p^{2^n} + 1)}_{\substack{\text{Div por } 2 \\ \text{pues } p \text{ es} \\ \text{impar.}}}$$

Así se concluye que

$$p^{2^{n+1}} - 1 \text{ es divisible por } 2^{n+3}.$$

P2)

(i) Como p es reflexiva, $\forall a \in E$ se tiene $a p a$ y por tanto se tiene $a p a \wedge a p a$, por def. entonces $a R a$ se tiene.

Como p es transitiva, dados $a, b, c \in E$ tales que $a R b \wedge b R c$.

$$a R b \Leftrightarrow a p b \wedge b p a$$

$$b R c \Leftrightarrow b p c \wedge c p b$$

Esto implica que se tiene

$$\left. \begin{array}{l} a p b \wedge b p c \Rightarrow a p c \\ a p b \wedge b p a \Rightarrow c p a \end{array} \right\} \Rightarrow a p c \wedge c p a \Leftrightarrow a R c$$

Finalmente la simetría se obtiene de la conmutatividad de \wedge , pues dados $a, b \in E$

$$a R b \Leftrightarrow a p b \wedge b p a \Leftrightarrow b p a \wedge a p b \Leftrightarrow b R a.$$

(ii) Dado $[a]_R \in E/R$, se tiene que $a \in R$, como p es reflexiva $a p a$ y entonces $[a]_R R [a]_R$, luego R es reflexiva.

Dado $[a], [b], [c] \in E/R$ se tiene que si $[a] R [b]$ y $[b] R [c]$, entonces $a p b \wedge b p c$, como p es transitiva, $a p c \Rightarrow [a] R [c]$ y luego R es transitiva.

Finalmente, dados $[a], [b] \in E/R$, se tiene que si $[a] R [b] \wedge [b] R [a]$, entonces $a p b \wedge b p a$, luego se tiene $a R b$, i.e. $[a] = [b]$. Luego R es antisimétrica. Por lo tanto R es de orden.

P3)

(i) Sean $b_1, b_2 \in f(A)$. $\exists a_1, a_2 \in A$ tales que $f(a_1) = b_1$ y $f(a_2) = b_2$. Se observa que como f es morfismo $b_1 \Delta b_2 = f(a_1) \Delta f(a_2) = f(a_1 * a_2)$

Como $a_1 * a_2 \in A$, se tiene que $b_1 \Delta b_2 \in f(A)$.
 $\therefore \Delta$ es l.c.i. en $f(A)$

(ii) Si $(A, *)$ es grupo, sea e su neutro.

Se tiene que $f(e)$ es neutro en $f(A)$, pues dado $b \in f(A)$, se tiene $a \in A$ t.g. $b = f(a)$

$$f(e) \Delta b = f(e) \Delta f(a) = f(e * a) = f(a) = b.$$

$$b \Delta f(e) = f(a) \Delta f(e) = f(a * e) = f(a) = b.$$

Dados $b_1, b_2, b_3 \in f(A)$, se tienen $a_1, a_2, a_3 \in A$ tales que $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2$, $f(a_3) = b_3$ con lo que

$$b_1 \Delta (b_2 \Delta b_3) = f(a_1) \Delta (f(a_2) \Delta f(a_3)) = f(a_1) \Delta f(a_2 * a_3)$$

$$= f(a_1 * (a_2 * a_3)) = f((a_1 * a_2) * a_3)$$

$$= f(a_1 * a_2) \Delta f(a_3)$$

$$= (f(a_1) \Delta f(a_2)) \Delta f(a_3) = (b_1 \Delta b_2) \Delta b_3.$$

Luego Δ es asoc. en $f(A)$.

Si $b \in f(A)$, se tiene $a \in A$ t.q. $f(a) = b$ como A es grupo, $a^{-1} \in A$ y se tiene que:

$$f(a^{-1}) \Delta b = f(a^{-1}) \Delta f(a) = f(a^{-1} \times a) = f(e)$$

$$b \Delta f(a^{-1}) = f(a) \Delta f(a^{-1}) = f(a \times a^{-1}) = f(e)$$

$$\text{Así } f(a^{-1}) = b^{-1} \in f(A)$$

Luego $(f(A), \Delta)$ es grupo.

P41 (i)

Se observa que

$$|z+w| = |z-w|$$

$$\Leftrightarrow (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = (z-w)(\bar{z}-\bar{w})$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} + w\bar{w} + w\bar{z} + z\bar{w} = z\bar{z} + w\bar{w} - w\bar{z} - z\bar{w}$$

$$\Leftrightarrow 2(z\bar{w} + w\bar{z}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 \operatorname{Re}(z\bar{w}) = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(z\bar{w}) = 0 \rightarrow (i.1)$$

Como $w \neq 0$, $|w| \neq 0$

$$\text{De (i.1)} \quad \operatorname{Re}(z\bar{w}) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|w|^2} \operatorname{Re}(z\bar{w}) = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{z\bar{w}}{|w|^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{z\bar{w}}{w\bar{w}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{z}{w}\right) = 0 \rightarrow (i.2)$$

(ii) Claramente \bar{F} es sobreyectiva, pues para $y \in \mathbb{R}$ se tiene que $p(x) = yx \in \mathbb{R}[x]$ y se tiene que $\bar{F}(p(x)) = y$.

\bar{F} no es inyectiva, pues se tiene que

$$p_1(x) = x$$

$$p_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x$$

son polinomios distintos y, sin embargo

$$\bar{F}(p_1(x)) = 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \bar{F}(p_2(x))$$