



EXAMEN

P1. Considere el conjunto de funciones

$$G = \{\varphi_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi_{a,b}(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$$

- a) (1,0 pto.) Dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $a, c \neq 0$ encuentre el valor $(\varphi_{a,b} \circ \varphi_{c,d})(x)$ y deduzca que la composición de funciones es cerrada en G .
- b) (2,0 ptos.) Demuestre que (G, \circ) es un grupo. ¿Es abeliano? Justifique.
- c) (1,5 ptos.) Sea

$$H = \{h_b \in G \mid h_b(x) = x + b, b \in \mathbb{R}\}.$$

Demuestre que H es subgrupo de G .

- d) (1,5 ptos.) Demuestre que $\forall g \in G, gHg^{-1} = H$
donde

$$gHg^{-1} = \{g \circ h \circ g^{-1} \mid h \in H\}.$$

P2. a) (3,0 ptos.) Dada la ecuación

$$x^3 + ax^2 + bx + a = 0, a, b \in \mathbb{R},$$

determine a y b de modo que $x = 2 + i$ sea una raíz y determine las otras raíces.

- b) (1,0 pto.) Sea $p(x)$ un polinomio de grado mayor o igual que 1 y $a \in \mathbb{R}$. Demuestre que r es raíz de $p(x)$ si y sólo si $r - a$ es raíz de $q(x) = p(x + a)$.
- c) (2,0 ptos.) Considere el polinomio $p(x) = x^4 - 2$. Determine las raíces de p y escriba su factorización tanto en $\mathbb{R}[x]$ como en $\mathbb{C}[x]$.

P3. a) (3,0 ptos.) Determine los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$\frac{1}{a + ib} + \frac{2}{a - ib} = 1 + i.$$

- b) (3,0 ptos.) Sea $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Calcule la sumatoria

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{(3 + (-1)^k)^k}.$$

Consultas sólo al auxiliar
Justifique cada uno de sus pasos
Tiempo: 3:00