



EXAMEN

P1.

- (a) (3.0 ptos.) Demuestre, usando inducción, que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

- (b) (3.0 ptos.) Pruebe que

$$p(x) = \sum_{j=1}^6 \frac{(-1)^j}{(j+1)^2} \left(\sum_{k=1}^j 4k^3 x^{j-1} \right) = 36x^5 - 25x^4 + 16x^3 - 9x^2 + 4x - 1.$$

Además averigüe si tiene raíces enteras.

Indicación: Puede usar parte (a).

P2.

- (a) (2.0 ptos.) Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ con $f(z) = \bar{z}$. Demuestre que f es un isomorfismo entre $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.
- (b) Sea (G, \star) un grupo, y sea (H, \star) un subgrupo de (G, \star) . La traslación izquierda de H en G con respecto a un $x \in G$ dado se define como $x \star H = \{x \star h \mid h \in H\}$.

Pruebe que:

- (i) (3,0 ptos.) Para cada $x \in G$ se tiene que: $x \in H \Leftrightarrow x \star H = H$.
- (ii) (1,0 pto.) Para cada $y \in G \setminus H$ se tiene que: $(y \star H) \cap H = \emptyset$.

P3.

- (a) (3.0 ptos.) Encuentre todas las raíces del polinomio

$$p(x) = x^4 + 4x^3 - 4x - 1,$$

justificando su respuesta.

- (b) (3.0 ptos.) Sean $n, m, k \in \mathbb{N}$ cualquiera y considere los polinomios

$$p(x) = x^{3n} + x^{3m+1} + x^{3k+2} \quad \text{y} \quad q(x) = x^2 + x + 1.$$

Demuestre que $p(x)$ es divisible por $q(x)$, cualquiera sean los valores de $n, m, k \in \mathbb{N}$.

Tiempo: 2:30 horas.