

## Examen de Algebra 2009 - Solución.

P1) Hay que probar que  $\Omega$  es de orden.

Claramente es reflexiva, pues dada  $[x] \in N/R$ , es evidente que  $\min[x] \leq \min[x]$ , luego  $[x] \Omega [x]$ .

Se tiene la transitividad, en efecto, dados  $[x], [y], [z] \in N/R$  tales que  $[x] \Omega [y]$ ,  $[y] \Omega [z]$ . Se tiene entonces que  $\min[x] \leq \min[y] \wedge \min[y] \leq \min[z] \Rightarrow \min[x] \leq \min[z]$  y así  $[x] \Omega [z]$ .

La antisimetría se ve pues dados  $[x], [y] \in N/R$  tales que  $[x] \Omega [y]$  e  $[y] \Omega [x]$ , se tiene  $\min[x] \leq \min[y]$  y  $\min[y] \leq \min[x]$  con lo cual  $\min[x] = \min[y]$ , esto implica que  $\min[x] \in [x] \cap [y]$  y entonces  $[x] = [y]$ .

$\Omega$  es de orden.

P2) Por inducción:

Caso base:  $n=0$

$$\sum_{i=0}^0 \frac{2^i}{a^{i+1}} = \frac{2^0}{a^{0+1}} = \frac{1}{a+1}$$

$$\frac{2}{1-a^2} - \frac{1}{1-a} = \frac{2-1-a}{(1+a)(1-a)} = \frac{1-a}{(1+a)(1-a)} = \frac{1}{a+1}$$

Se cumple el C.B.

Paso Inductivo:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{2^k}{a^{2^k} + 1} = \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{a^{2^k} + 1} + \frac{2^{n+1}}{a^{2^{n+1}} + 1}$$

$$= \frac{2^{n+1}}{1 - a^{2^{n+1}}} - \frac{1}{1-a} - \frac{2^{n+1}}{a^{2^{n+1}} + 1}$$

$$= \frac{2^{n+1}}{1 - a^{2^{n+1}}} - \frac{2^{n+1}}{a^{2^{n+1}} + 1} - \frac{1}{1-a}$$

$$= \frac{2^{n+1} a^{2^{n+1}} + 2^{n+1} + 2^{n+1} - 2^{n+1} a^{2^{n+1}}}{(1 - a^{2^{n+1}})(a^{2^{n+1}} + 1)} - \frac{1}{1-a}$$

$$= \frac{2^{n+2}}{1 - a^{2^{n+2}}} - \frac{1}{1-a}$$

73)

$$S_n = \sum_{k=1}^n (k+1) \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^n (k+1) [\ln(k) - \ln(k+1)]$$

$$= \sum_{k=1}^n k \ln(k) + \ln(k) - (k+1) \ln(k+1)$$

$$= \sum_{k=1}^n k \ln(k) - (k+1) \ln(k+1) + \sum_{k=1}^n \ln(k)$$

$$= 1 \ln(1) - (n+1) \ln(n+1) + \ln(n!)$$

$$= \ln(n!) - (n+1) \ln(n+1)$$

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{k=1}^n \frac{k 2^k}{(k+2)!} \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{(k+2-2) 2^k}{(k+2)!} \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{(k+2) 2^k}{(k+2)!} - \frac{2^{k+1}}{(k+2)!} \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{(k+1)!} - \frac{2^{k+1}}{(k+2)!} \\
&= \frac{2}{4!} - \frac{2^{n+1}}{(n+2)!} \\
&= \frac{1}{12} - \frac{2^{n+1}}{(n+2)!}
\end{aligned}$$

P41 Demostración:

Se tiene que por definición  $F_\varphi \subseteq G$ .

Además, como  $\varphi$  es morfismo, si  $e$  es el neutro de  $G$ , se tiene que  $\varphi(e) = e$ , luego  $e \in F_\varphi$ , es decir  $F_\varphi \neq \emptyset$ .

Finalmente, se tiene que dados  $a, b \in F_\varphi$  se quiere probar que  $a \times b^{-1} \in F_\varphi$ . Para ello, se calcula:

$$\begin{aligned}
\varphi(a \times b^{-1}) &= \varphi(a) \times \varphi(b^{-1}) \\
&= a \times \varphi(b)^{-1} \\
&= a \times b^{-1}
\end{aligned}$$

Por lo tanto  $F_\varphi$  es subgrupo de  $G$ .



P5 Se tiene que

$$\begin{aligned} z^6 - 2iz^3 - 1 &= z^6 - 2(z^3 + i) \\ &= (z^3 - i)^2 \\ &= (z - i)^2 (z^2 + iz - 1)^2 \end{aligned}$$

y se observa que las raíces de  $z^2 + iz - 1$  son:

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \quad \text{y} \quad z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

con lo que:

$$z^6 - 2iz^3 - 1 = (z - i)^2 \left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^2 \left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^2$$

Aquí se encuentran las raíces de  $z^6 - 2iz^3 - 1$ , que son  $i$ ,  $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ ,  $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$  y cada una tiene multiplicidad dos.

P6 Se considera  $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ , se quiere encontrar los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

la condición (i) se traduce en las ecuaciones

$$8 + 4a + 2b + c = 0$$

$$c = 0$$

y la condición (ii) se traduce en la ecuación

$$1 + a + b + c = 27 + 9a + 3b + c$$

Se ha de resolver el problema:

$$4a + 2b + c = -8$$

$$8a + 2b = -26$$

$$\boxed{c = 0}$$

De lo que se obtiene:

$$\begin{cases} 4a + 2b = -8 \\ 4a + b = -13 \end{cases} \Rightarrow \boxed{b = 5}$$

De lo cual se tiene

$$4a + 5 = -13 \Rightarrow 4a = -18 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{9}{2}}$$

y así se tiene que

$$p(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 5x$$