



Pauta Control 6

P1.

- a)(i) Se debe verificar que $(\mathbb{Z}^2, \oplus, \odot)$ es anillo conmutativo. Se sabe por hipótesis que (\mathbb{Z}^2, \oplus) es grupo abeliano en que su neutro, o cero del anillo es $(0, 0)$ pues verifica.

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \quad (0, 0) \oplus (a, b) = (a, b) \oplus (0, 0) = (a, b) \quad (0.3 \text{ puntos})$$

Falta verificar \odot es asociativa, conmutativa y que distribuye con respecto a \oplus

Asociatividad: Sean $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{Z}^2$

$$[(a, b) \odot (c, d)] \odot (e, f) = (ac, 0) \odot (e, f) = ((ac)e, 0) = (a(ce), 0) \quad \text{Asociat. en } \mathbb{Z} \\ = (a, b) \odot (ce, 0) = (a, b) \odot ((c, d) \odot (e, f)) \quad (0.5 \text{ puntos})$$

$$\text{Conmutatividad: } (a, b) \odot (c, d) = (ac, 0) = (ca, 0) = (c, d) \odot (a, b) \quad (0.2 \text{ puntos})$$

$$\text{Distributividad: } (a, b) \odot [(c, d) \oplus (e, f)] = (a, b) \odot (c + e, d + f) = (a(c + e), 0)$$

$$\text{también } [(a, b) \odot (c, d)] \oplus [(a, b) \odot (e, f)] = (ac, 0) \oplus (ae, 0)$$

$$= (ac + ae, 0) = (a(c + e), 0).$$

Se concluye que $(\mathbb{Z}^2, \oplus, \odot)$ es anillo conmutativo. (0.5 puntos)

- (ii) Si suponemos que (u_1, u_2) es unidad en el anillo, debe cumplirse que

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, (u_1, u_2) \odot (a, b) = (a, b)$$

pero $(u_1, u_2) \odot (a, b) = (u_1 a, 0) \neq (a, b)$ pues $b \in \mathbb{Z}$ es arbitrario

así $(\mathbb{Z}^2, \oplus, \odot)$ no tiene unidad. (0.5 puntos)

Divisores del Cero: Sean $(a, b), (c, d) \neq 0 \wedge (a, b) \odot (c, d) = (0, 0)$

$$\Rightarrow (ac, 0) = (0, 0) \Rightarrow ac = 0 \Rightarrow a = 0 \vee c = 0 \quad (0.7 \text{ puntos})$$

Así, son divisores del cero $\{(0, k)/k \in \mathbb{Z}\} \therefore$ tiene divisores del cero.

Un cuerpo no posee divisores del cero, entonces $(\mathbb{Z}^2, \oplus, \odot)$ no es cuerpo. (0.3 puntos)

- b)(i) Sea $K = \{a_0, b_1, c\}$ en que a_0 = cero del cuerpo y b_1 = unidad. Se sabe que $a_0 \neq b_1$

Así la tabla preliminar para el grupo aditivo $(K, +)$ será:

+	a_0	b_1	c
a_0	a_0	b_1	c
b_1	b_1		
c	c		

Para completar si sabe que $c + c \neq c$ pues $c \neq a_0$ (cero) y $c + c \neq a_0$ pues c no

puede ser su propio simétrico (inverso) reduciendo el cuerpo a 2 elementos. Entonces $c + c = b_1$ y se completa el llenado de la tabla evitando elementos repetidos en filas y columnas.

Entonces

+	a_0	b_1	c
a_0	a_0	b_1	c
b_1	b_1	c	a_0
c	c	a_0	b_1

(1.5 puntos)

La tabla para \cdot es inmediata, aplicando las propiedades del cero y la unidad

\cdot	a_0	b_1	c
a_0	a_0	a_0	a_0
b_1	a_0	b_1	c
c	a_0	c	b_1

Donde $c \cdot c = b_1$ evita que $c \cdot c = a_0$ pues no hay divisores del cero y $c \cdot c = c$

reduce a 2 el número de elementos de K . (0.5 puntos)

- (ii) El isomorfismo es evidente al comparar con las tablas de $(\mathbb{Z}_3 +_3, \cdot_3)$

$+_3$	[0]	[1]	[2]
[0]	[0]	[1]	[2]
[1]	[1]	[2]	[0]
[2]	[2]	[0]	[1]

y

\cdot_3	[0]	[1]	[2]
[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]
[2]	[0]	[2]	[1]

sigue que el isomorfismo $f : K \rightarrow \mathbb{Z}_3$ es:

$$f(a_0) = [0], f(b_1) = [1] \text{ y } f(c) = [2].$$

(1.0 puntos)

P2.

- (a) Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| > 1$ e $\text{Im}(z) > 0$. Demuestre que $\text{Im}\left(z + \frac{1}{z}\right) > 0$

Solución: Sea

$$z = x + iy \Rightarrow z + \frac{1}{z} = x + iy + \frac{1}{x + iy} = x + iy + \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow z + \frac{1}{z} = \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2}\right) + iy \left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2}\right)$$

(1.5 puntos)

Entonces $\text{Im}\left(z + \frac{1}{z}\right) = y\left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2}\right) = y \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2}$ donde $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow |z|^2 = x^2 + y^2 > 1$ por hipótesis y $\text{Im}(z) = y > 0$ por hipótesis,

(1.5 puntos)

Así, $\text{Im}\left(z + \frac{1}{z}\right) = y \cdot \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2} > 0 \quad ((> 0) \begin{smallmatrix} (> 0) \\ (> 0) \end{smallmatrix})$

Observación: También puede demostrarse usando que $\forall u \in \mathbb{C} \quad \text{Im}(u) = \frac{1}{2i}(u - \bar{u})$

- (b)

Solución:

$$z^2 - 2z + 2 = 0 \Rightarrow z = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} \rightarrow 1 + i = z_1; i - 1 = z_2$$

$$\text{Entonces } \cot \theta + z_1 - 1 = \cot \theta + 1 + i - 1 = \cot \theta + i = \frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\sin \theta}$$

(1.0 puntos)

$$\text{y } \cot \theta + z_2 - 1 = \cot \theta + 1 - i - 1 = \cot \theta - i = \frac{\cos \theta - i \sin \theta}{\sin \theta}.$$

Sigue que

$$\begin{aligned} \frac{(\cot \theta + z_1 - 1)^n - (\cot \theta + z_2 - 1)^n}{z_1 - z_2} &= \frac{\left(\frac{e^{i\theta}}{\sin \theta}\right)^n - \left(\frac{e^{i(-\theta)}}{\sin \theta}\right)^n}{2i} \\ &= \frac{e^{in\theta} - e^{i(-n\theta)}}{2i(\sin \theta)^n} = \frac{\cancel{\cos(n\theta)} + i \sin(n\theta) - (\cancel{\cos(n\theta)} - i \sin(n\theta))}{2i(\sin \theta)^n} \\ &= \frac{2i \sin(n\theta)}{2i(\sin \theta)^n} = \sin(n\theta)(\text{cosec } \theta)^n \end{aligned}$$

(2.0 puntos)