



Pauta Control 5

P1.

- (i) $(G, *)$ es grupo abeliano.

*	a	b	c	d
a				
b		b		
c	b			a
d				

Según la tabla $b * b = b$ y en un grupo el único elemento idem potente es el neutro.

Así neutro en G es b

(1.0 punto)

Como consecuencia la fila y la columna de b son la fila y la columna de los elementos del grupo.

Así

*	a	b	c	d
a		a		
b	a	b	c	d
c	b	c		a
d		d		

(0.5 puntos)

Además $(G, *)$ es grupo conmutativo, entonces, $a * c = c * a = b \wedge d * c = c * d = a$. Completando

*	a	b	c	d
a		a	b	
b	a	b	c	d
c	b	c		a
d		d	a	

(0.5 puntos)

Finalmente, los elementos del grupo son regulares de modo que en filas y columnas no pueden haber elementos repetidos.

Así, $c * c = d$ y $a * d = c$, necesariamente, porque a, b están en la fila de a y a, d están en la columna de d .

(1.0 punto)

Completando

*	a	b	c	d
a	d	a	b	c
b	a	b	c	d
c	b	c	d	a
d	c	d	a	b

donde $d * a = a * d = c$ se completa por conmutatividad y $a * a = d$, $d * d = b$ por los elementos ausentes en la fila a y la columna de d . (1.0 punto)

- (ii) Dos subgrupos de $(G, *)$ son los triviales, es decir, $(G, *)$ y $(\{b\}, *)$. Además, como $|G| = 4$, el orden de posibles subgrupos de G es divisor de 4 (TEO. de LAGRANGE), es decir, si los hay, el orden de los subgrupos no triviales es 2. (1.0 punto)

En efecto, $(\{b, d\}, *)$ es subgrupo, según la tabla.

Así, los subgrupos de $(G, *)$ son: $(G, *)$, $(\{b\}, *)$ y $(\{b, d\}, *)$. (1.0 punto)

P2.

- (i) $(p\mathbb{Z}, +, *)$ es anillo conmutativo con unidad. En efecto, $(p\mathbb{Z}, +)$ es grupo abeliano pues los elementos de $p\mathbb{Z}$ son enteros y estos en general satisfacen la asociatividad, la conmutatividad neutro $= p \cdot 0 = 0$ y opuestos $p(-n)$ para cada $p \cdot n$ con $n \in \mathbb{Z}$. (1.0 punto)

Asociatividad para $*$. Sean $x, y, z \in p\mathbb{Z}$.

$$(x * y) * z = \frac{xy}{p} * z = \frac{\frac{xy}{p} \cdot z}{p} = \frac{xyz}{p^2} = \frac{x \cdot \frac{yz}{p}}{p} = \frac{x(y * z)}{p} = x * (y * z).$$

(0.5 puntos)

Distributividad de $*$ con respecto a $+$.

$$x * (y + z) = \frac{x(y + z)}{p} = \frac{xy}{p} + \frac{xz}{p} = (x * y) + (x * z)$$

(0.5 puntos)

Conmutatividad $x * y = \frac{xy}{p} = \frac{yx}{p} = y * x \quad \forall x, y \in p\mathbb{Z}$.

Unidad: Sea $u \in p\mathbb{Z}$ tal que $\forall x \in p\mathbb{Z}$, $x * u = x$

$$\Leftrightarrow \frac{xu}{p} = x \Rightarrow u = p = p \cdot 1 \in p\mathbb{Z}.$$

Sigue que $(p\mathbb{Z}, +, *)$ es anillo conmutativo con unidad. (1.0 punto)

- (ii) Es inmediato que $\varphi : (\mathbb{Z}, +, \cdot) \rightarrow (p\mathbb{Z}, +, *)$ es una biyección
 $x \mapsto \varphi(x) = px$ (0.5 puntos)

pues $\varphi^{-1}(x) = \frac{x}{p}$ es tal que $\varphi \circ \varphi^{-1}(x) = \varphi(\varphi^{-1}(x)) = p \cdot \frac{x}{p} = x = \text{id}_{\mathbb{Z}}$. (0.5 puntos)

Morfismos: Sean $x, y \in \mathbb{Z}$, $\varphi(x + y) = p(x + y) = px + py = \varphi(x) + \varphi(y)$ (0.7 puntos)

y $\varphi(xy) = p(x \cdot y) = pxy = \frac{px \cdot py}{p} = (px) * (py) = \varphi(x) * \varphi(y)$.

Sigue que $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es isomorfo con $(p\mathbb{Z}, +, *)$ (1.3 puntos)

P3.

- (i) $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Según la propiedad compacta, (S, \cdot) es subgrupo de $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ si $S \neq \emptyset$ y $\forall z_1, z_2 \in S \Rightarrow z_1 \cdot z_2^{-1} \in S$.

En efecto, $S \neq \emptyset$ pues, por ejemplo, $1 \in S$ ($|1| = 1$). (1.0 punto)

Sean $z_1, z_2 \in S$, entonces $|z_1| = 1$ y $|z_2| = 1$.

Entonces $|z_1 \cdot z_2^{-1}| = \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{1}{1} = 1$ de donde $z_1 \cdot z_2^{-1} \in S$.

Por lo tanto (S, \cdot) es subgrupo de $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ (2.0 puntos)

(ii) Sea $w = \frac{1+z}{1-\bar{z}}$ con $z \in S$, $(|z| = 1) \wedge z \neq 1$.

$w \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$ (imaginario puro) si $Re(w) = 0$.

(0.5 puntos)

Como $2 \cdot Re(w) = w + \bar{w}$ calculamos.

$$w + \bar{w} = \frac{1+z}{1-\bar{z}} + \overline{\left(\frac{1+z}{1-\bar{z}}\right)} = \frac{1+z}{1-\bar{z}} + \frac{1+\bar{z}}{1-z} = \frac{(1+z)(1-\bar{z}) + (1-\bar{z})(1+z)}{(1-\bar{z})(1-z)} =$$

(1.0 punto)

$$= \frac{1 - z\bar{z} + z - \bar{z} + 1 - z\bar{z} - z + \bar{z}}{(1-\bar{z})(1-z)} = \frac{2 - 2z\bar{z}}{(1-\bar{z})(1-z)} \text{ con } z\bar{z} = |z|^2 = 1$$

$$\Rightarrow w + \bar{w} = \frac{2 - 2|z|^2}{(1-\bar{z})(1-z)} = \frac{2 - 2}{(1-\bar{z})(1-z)} = 0$$

Sigue que $2 \cdot Re(w) = w + \bar{w} = 0$. Así w es imaginario puro.

(1.5 puntos)

OBSERVACION: También puede resolverse con $z = x + i$ y con $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$

$$w = \frac{1+x+iy}{1-x-iy} \dots \text{ etc.}$$