MA1101 - Introducción al Álgebra: Semestre 2012-01
Profesor: María Leonor Varas
Auxiliar: Sebastián Espinosa Trujillo

Clase Auxiliar Extra
Preparación Control Recuperativo

P1. Sean A, B, C subconjuntos del conjunto E. Probar que,

$$A \cap B \cap C = \emptyset \Rightarrow (A \backslash B) \cup (B \backslash C) \cup (C \backslash A) = A \cup B \cup C$$

P2. Pruebe que $\forall A \subseteq F, \forall B \subseteq F, f^{-1}(A \triangle B) = f^{-1}(A) \triangle f^{-1}(B)$

P3. Considere el conjunto $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es biyectiva}\}$. Se define la función $\Psi : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, dada por $\Psi(f, g) = (f \circ g)^{-1}$.

(a) Pruebe que Ψ es epiyectiva pero no inyectiva.

(b) Demuestre que $\Psi(\Psi(f, g), \Psi(g^{-1}, f^{-1})) = id_{\mathbb{R}}$

P4. Demuestre, usando inducción, que $\forall n \geq 1 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}$

P5. Sean j, k, n naturales tales que $0 \leq k \leq j \leq n$:

(a) Demuestre, sin usar inducción, que:

$$\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k+1}$$

(b) Calcule

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{i+j-1}{j}$$

P6. Se define en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ la relación $\mathcal{R}$ por $(x, y)\mathcal{R}(z, t) \Leftrightarrow xt = zy$.

(a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia y describa explícitamente $[(0, 1)]$ y $[(3, 3)]$

(b) Sea $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \backslash \{0\} \to \mathbb{Q}$ definida por

$$f(x, y) = \frac{x}{y}.$$

Demuestre que

$$(x, y)\mathcal{R}(z, t) \Leftrightarrow f(x, y) = f(z, t).$$

(c) Demuestre que la función $F : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \backslash \{0\} \to \mathbb{Q}$ dada por $F([(x, y)]) = f(x, y)$ es biyectiva.

(d) ¿Es numerable el conjunto cuociente de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ sobre $\mathcal{R}$? Justifique.

P7. Sea A un conjunto infinito y $f : A \to \mathbb{N}$ una función tal que:

$$(\forall n \in \mathbb{N}), f^{-1}[\{n\}] \text{ es finito o numerable}$$

Demuestre que A es infinito numerable.