MA1101-7 - Introducción al Álgebra. Semestre 2009-01
Profesor: Jaime Ortega.
Auxiliares: Mónica Carvajal, Sebastián Reyes Riffo.

Cardinalidad

Dados A, B conjuntos no vacíos, diremos que tienen **el mismo cardinal** si $\exists f : A \to B$ que sea biyectiva. En tal caso, $|A| = |B|$.
Si f es inyectiva, tendremos que $|A| \leq |B|$. Una consecuencia directa de lo anterior es: si $A \subseteq B$, entonces $|A| \leq |B|$.

Diremos que un conjunto es *numerable* ssi tiene el mismo cardinal que N. En cambio, un conjunto A será $infinito$ si su cardinal no es finito ($|A| \geq |N|$).

Algunas propiedades importantes:

- Sean $A_0, A_1, \ldots, A_n$ conjuntos numerables. Entonces $A_0 \times A_1 \times \ldots A_n$ es numerable.
- Sea $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ colección numerable de conjuntos, donde cada A_k es numerable. Entonces su unión $\bigcup_{k\in N} A_k$ es numerable.
- Sea A un conjunto infinito, y $x \in A$. Se tiene que $|A| = |A \backslash \{x\}|$.

Métodos para demostrar numerabilidad de un conjunto A

1. **Encontrar una función biyectiva entre N y el conjunto A.**
   Observación: Esta función también puede ir de cualquier conjunto numerable (como Z, Q, etcétera) hasta A, ya que sabemos de la existencia de una función biyectiva entre N y un conjunto numerable. Luego por composición, se concluye.

   Ejemplo (P5a, Semana 8): probar que el conjunto L de todas las rectas no verticales que pasan por el punto $(0, 1)$ y cortan al eje OX en una coordenada racional es numerable.
   Primero, veamos como es el conjunto L. Las rectas que pasan por $(0, 1)$ y $(a, 0)$, con $a \in Q\backslash\{0\}$ se caracterizan por ser de la forma:

   $$L_a : y = mx + n \quad m = \frac{-1}{a},\ n = 1$$

   Por lo cual

   $$L = \left\{ L_a : y = \frac{-1}{a}x + 1,\ a \in Q\backslash\{0\} \right\}$$

   Ahora consideremos la función $f : L \to Q\backslash\{0\}$, definida por $f(L_a) = \frac{-1}{a}$, la cual es biyectiva. Con esto, se tiene que $|L| = |Q\backslash\{0\}| = |N|$, y se tiene lo pedido.

2. **Encontrar una función inyectiva $f : A \rightarrow N$ (en realidad, sirve cualquier conjunto numerable); y luego demostrar que A es infinito.**
   Por qué? Como f es inyectiva, se tiene que $|A| \leq |N|$. Y de la definición de conjunto infinito, sabemos que $|A| \geq |N|$. Se concluye entonces que $|A| = |N|$.

3. **Unión numerable de conjuntos numerables.**
   Recomendado cuando en un conjunto hay más de una variable "moviéndose" y ambas pertenecen a conjuntos numerables, por ejemplo (P3, Semana 8):

   $$A = \left\{ x \in R : \exists k \in Z, \exists i \in N, x = \frac{k}{3^i} \right\}$$

   Lo que se hace frecuentemente es "fijar" uno de los índices, para así obtener una familia de conjuntos. En este caso, si fijamos el índice i:

   $$A_i = \left\{ x \in R : \exists k \in Z, x = \frac{k}{3^i} \right\}$$

   Notemos que $A = \bigcup_{i \in N} A_i$. Ahora basta mostrar que A_i es numerable $\forall i \in N$, pues sabemos que la unión numerable de conjuntos numerables es numerable.
   En efecto, A_i es numerable, pues basta considerar la biyección $f_i : A_i \rightarrow Z$ con $f_i(x) = k$.

4. **Demostrar que A es infinito; y luego ver que A es subconjunto de un conjunto numerable.**
   La razón es la misma del método 2.