

Guía de Álgebra
Control
Nº 3

MA11A
"05"

Tema: Estructuras Algebraicas
y Cardinalidad.

FOTOCOPIAS INTEGRAL
ALMIRANTE LATORRE 782
FONO: 971 9308

P1) Sea $(G, *)$ un grupo y $H \subseteq G$ tal que
 $\forall x \in G, x * H = H * x$ donde $x * H = \{x * h / h \in H\}$ y
 $H * x = \{h * x / h \in H\}$. Se define la relación de equivalencia
 R_H en G como:

$$x R_H y \Leftrightarrow x * y^{-1} \in H$$

(a) Probar que $*$ es compatible con R_H , es decir
 $\forall x, y, z, w \in G, x R_H y \wedge z R_H w \Rightarrow (x * z) R_H (y * w)$

(b) Probar que $[x]_{R_H} = \{y \in G / y = h * x \text{ para algún } h \in H\}$

(c) Se define para las clases de equivalencia de R_H

$$[x]_{R_H} \odot [y]_{R_H} = [x * y]_{R_H}$$

Probar que la operación está bien definida

(d) Probar que $(G/H, \odot)$ es un grupo (que se llama
grupo cociente) donde $G/H = \{[x]_{R_H} / x \in G\}$. Probar que
 $[e]_{R_H} = H$, donde e es el neutro de $(G, *)$.

Solución:

(a) Notemos que $x * H = H * x$ nos dice que un elemento
de $x * H$ (o sea de la forma $x * h_1$) puede ser escrito
como un elemento de $H * x$ (o sea de la forma $h_2 * x$)

En otras palabras tenemos que:

Dado $x * h_1 \in x * H, \exists h_2 \in H$ tal que

$$x * h_1 = h_2 * x \quad (*)$$

Pdgo: $x R_H y \wedge z R_H w \Rightarrow (x * z) R_H (y * w)$

Pero por definición de R_H tenemos que:

$$x R_H y \wedge z R_H w \Leftrightarrow x * y^{-1} \in H \wedge z * w^{-1} \in H$$

$$\text{y} \quad (x * z) R_H (y * w) \Leftrightarrow (x * z) * (y * w)^{-1} \in H$$

$$\Leftrightarrow (x * z) * (w^{-1} * y^{-1}) \in H$$

Entonces lo que en realidad buscamos probar es que:

$$x * y^{-1} \in H \wedge z * w^{-1} \in H \Rightarrow (x * z) * (w^{-1} * y^{-1}) \in H$$

En efecto, $x * y^{-1} \in H$ nos dice que $x * y^{-1} = h_1$ para algún
 $h_1 \in H$. Análogamente, $z * w^{-1} = h_2$ para algún $h_2 \in H$.

Veamos ahora que $(x * z) * (w^{-1} * y^{-1}) = (x * (z * w^{-1})) * y^{-1} = (x * h_2) * y^{-1}$

Asociatividad

Ahora por (*), $\exists h_3 \in H$ tal que $x * h_2 = h_3 * x$ (2)
 Usando esto en lo anterior tenemos que:
 $(x * z) * (w^{-1} * y^{-1}) = (x * h_2) * y^{-1} = (h_3 * x) * y^{-1}$ Asociatividad
 $\text{Pues } x * y^{-1} = h_2 \quad (= h_3 * (x * y^{-1})) = h_3 * h_2$

Nos gustaría entonces que esta última expresión estuviera en H (con lo cual nuestra demostración terminaría), o sea, que el "producto" de 2 elementos en H esté en H .

Proveamos entonces que:
 $(\forall h_1, h_2 \in H) \quad h_1 * h_2 \in H$ Notar que con esto nos basta para concluir nuestra demostración

Notemos que $h_1 R_H e \Leftrightarrow h_1 * e^{-1} \in H \Leftrightarrow h_1 * e \in H \Leftrightarrow h_1 \in H$
Pues $(e^{-1})^{-1} = e$

y que $e R_H h_2^{-1} \Leftrightarrow e * (h_2^{-1})^{-1} \in H \Leftrightarrow e * h_2 \in H \Leftrightarrow h_2 \in H$
 Pero como $h_1 \in H$ y $h_2 \in H$, entonces se cumple que $h_1 R_H e$ y que $e R_H h_2^{-1}$, pero por transitividad de R_H se tiene que $h_1 R_H h_2^{-1}$, lo cual equivale a que $h_1 * (h_2^{-1})^{-1} \in H$, o sea $h_1 * h_2 \in H$.

Nota: Es posible probar que H es un subgrupo de G (¡hágalo!).

$$\begin{aligned} (b) [x]_{R_H} &= \{y \in G / y R_H x\} = \{y \in G / y * x^{-1} \in H\} \\ &= \{y \in G / y * x^{-1} = h \text{ para algún } h \in H\} \\ &= \{y \in G / y = h * x \text{ para algún } h \in H\} \end{aligned}$$

pues $y * x^{-1} = h \Leftrightarrow y = h * x$ (*)

Luego, sólo nos basta probar (*), o sea

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad y * x^{-1} = h &\quad / * x \\ (y * x^{-1}) * x &= h * x \\ y * (x^{-1} * x) &= h * x \\ y * e &= h * x \\ y &= h * x \\ \Leftarrow \quad y &= h * x \quad / * x^{-1} \\ y * x^{-1} &= (h * x) * x^{-1} \\ &= h * (x * x^{-1}) \\ &= h * e = h \end{aligned}$$

(c) Probar que esta bien definida quiere decir en este contexto que la operación \odot es tal que $[x]_{R_H} \odot [y]_{R_H}$ no depende de los representantes que tomemos de las clases $[x]_{R_H}$ y $[y]_{R_H}$ (en este caso los representantes son x e y). Matemáticamente nos piden probar que:

$$[x_1]_{R_H} = [x_2]_{R_H} \text{ y } [y_1]_{R_H} = [y_2]_{R_H} \Rightarrow [x_1]_{R_H} \odot [y_1]_{R_H} = [x_2]_{R_H} \odot [y_2]_{R_H}$$

Dem: Tenemos que $[x_1]_{R_H} = [x_2]_{R_H}$ y $[y_1]_{R_H} = [y_2]_{R_H}$

Luego como $[x_1]_{R_H} = [x_2]_{R_H} \Leftrightarrow x_1 R_H x_2$

(3)

y $[y_1]_{R_H} = [y_2]_{R_H} \Leftrightarrow y_1 R_H y_2$
 tendremos que $x_1 R_H x_2 \wedge y_1 R_H y_2$, que por la parte (a),
 implican que $(x_1 * y_1) R_H (x_2 * y_2)$, lo cual equivale a

$$[x_1 * y_1]_{R_H} = [x_2 * y_2]_{R_H} \quad \text{Por definición de } \odot$$

o bien $[x_1]_{R_H} \odot [y_1]_{R_H} = [x_2]_{R_H} \odot [y_2]_{R_H}$ \square

(d) Notemos que $[e]_{R_H} = \{y \in G \mid y = \frac{h * e}{h} \text{ para algún } h \in H\}$

Por parte

$$(b) = \{h \in H\} = H$$

Ahora probemos que $(G/H, \odot)$ es grupo.

(1) Claramente es l.c.i. pues

$$\begin{cases} [x] \in G/H \\ [y] \in G/H \end{cases} \Rightarrow [x] \odot [y] = [x * y] \in G/H$$

$x, y \in G$

Nota: Omití el subíndice R_H para comodidad de escritura.

(2) Es asociativa.

$$\begin{aligned} ([x] \odot [y]) \odot [z] &= ([x * y]) \odot [z] = [(x * y) * z] \\ &= [x * (y * z)] \quad \text{* es asociativo} \\ &= [x] \odot [y * z] \\ &= [x] \odot ([y] \odot [z]) \end{aligned}$$

(3) Tiene neutro y es $[e]$ pues:

$$[x] \odot [e] = [x * e] = [x]$$

$$[e] \odot [x] = [e * x] = [x]$$

(4) $\forall [x] \in G/H, \exists [x]^{-1} = [x^{-1}] \in G/H$ inverso de

$$[x] \text{ pues } [x] \odot [x^{-1}] = [x * x^{-1}] = [e]$$

$$[x^{-1}] \odot [x] = [x^{-1} * x] = [e]$$

EL NEUTRO EN $(G/H, \odot)$

Luego $(G/H, \odot)$ es un grupo \square

P2 (a) Sea $(G, *)$ un grupo abeliano y $H, K \subseteq G$ subgrupos de G . Se define el conjunto:

$$H * K = \{h * k \mid h \in H, k \in K\} \quad (\text{Control 3, 1998})$$

Probar que $H * K$ es un subgrupo de G .

(b) Sea $(G, *)$ un grupo tal que $(\forall g \in G)(\exists m \geq 1)$ tal

que $g^m = \underbrace{g * g * \dots * g}_{m \text{ veces}} = e$. Probar que el único

\hookrightarrow (EL NEUTRO)

homomorfismo $F: (G, *) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ es la función constante $F(g) = 0 \quad (\forall g \in G)$ (Control 3, 1998)

(c) Dada $(G, *)$ un grupo que satisface la propiedad: (4)
 $(\forall a \in G) a * a = e$ (neutro del grupo)
 o sea, el inverso de cada elemento del grupo es el mismo elemento. Pruebe que G es un grupo abeliano.
 Indicación: calcule $(a * b) * (b * a)$ (Control 3, 1998)

Solución:

(a) Como $H * K = \{h * k \mid h \in H, k \in K\}$
 y $h * k \in G$ (pues $h \in H \subseteq G$ y $k \in K \subseteq G$)
 \uparrow G es cerrado para $*$
 $\Rightarrow H * K \subseteq G$.

Ahora $H * K \neq \emptyset$ pues $\exists h \in H$ ($H \neq \emptyset$) y $\exists k \in K$ ($K \neq \emptyset$)
 y por lo tanto $h * k \in H * K$.

Luego solo nos falta probar que si

$$x, y \in H * K \Rightarrow x * y^{-1} \in H * K$$

En efecto $x \in H * K \Rightarrow x = h_1 * k_1$ $h_1, k_1 \in H$
 $y \in H * K \Rightarrow y = h_2 * k_2$ $h_2, k_2 \in K$

$$\begin{aligned} \circ \circ x * y^{-1} &= (h_1 * k_1) * (h_2 * k_2)^{-1} \\ &= (h_1 * k_1) * (k_2^{-1} * h_2^{-1}) \\ &= \underbrace{(h_1 * h_2^{-1})}_{\in H} * \underbrace{(k_1 * k_2^{-1})}_{\in K} \end{aligned}$$

Reordenando por
 conmutatividad y
 agrupando por
 asociatividad.

$\Rightarrow x * y^{-1} \in H * K$ pues $h_1 * h_2^{-1} \in H$ $\text{pues } H, K$
 $k_1 * k_2^{-1} \in K$ son subgrupos
 $\text{de } G.$ \square

(b) Dado $g \in G$, probaremos que $F(g) = 0$

Como $g \in G$, $\exists m \geq 1$ tal que $\underbrace{g * g * \dots * g}_{m \text{ veces}} = e$ (*)

Como F es homomorfismo de $(G, *)$ en $(\mathbb{Z}, +)$ tenemos
 que $F(\underbrace{g * \dots * g}_{m \text{ veces}}) = \underbrace{F(g) + \dots + F(g)}_{m \text{ veces}} = F(e)$ (**)

\uparrow Por homomorfismo.

\uparrow Por (*)

Pero $F(e) = 0$ donde "0" es el neutro en $(\mathbb{Z}, +)$
 (los homomorfismos entre grupos envían el neutro
 en el neutro, y $(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo)

Luego por (**), $m F(g) = 0$

$\Rightarrow F(g) = 0$ pues $m \neq 0$
 $(m \geq 1)$ \square

(c) Notemos que

$$(a * b) * (b * a) = (a * (b * b)) * a = (a * e) * a = a * a = e$$

\uparrow $*$ es asociativo

\uparrow Propiedad de $(G, *)$

Pero $(a*b)*(a*b) = e$ (Propiedad del problema) ⑤
 $(\text{Algo}) * (\text{Algo}) = e$

Luego $(a*b)*(b*a) = (a*b)*(a*b)$
 $\Rightarrow b*a = a*b$ ← CANCELABILIDAD
 (CANCELLO $a*b$ por LA IZQUIERDA) \square

P3 | Sea $f: (\mathbb{Z}_m, \oplus) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ un homomorfismo cualquiera. Demuestre que f es la función constante igual a 0.
 (Indicación: $\underbrace{[1] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]}_{m \text{ VECES}} = [0]$)

Resolución:

$$f(\underbrace{[1] \oplus [1] \oplus \dots \oplus [1]}_{m \text{ VECES}}) = \underbrace{f([1]) + \dots + f([1])}_{m \text{ VECES}} = f([0])$$

Por homomorfismo

Por indicación

Pero $f([0]) = 0$ ← Neutro en $(\mathbb{Z}, +)$
 EL NEUTRO EN (\mathbb{Z}_m, \oplus) PUES f ES UN HOMOMORFISMO ENTRE GRUPOS.

Luego $m f([1]) = 0 \Rightarrow f([1]) = 0$ (Pues $m \neq 0$)

Finalmente:

$$f([k]) = f(\underbrace{[1] \oplus \dots \oplus [1]}_{k \text{ VECES}}) = k f([1]) = 0$$

← PUES $f([1]) = 0$

Esto último es $\forall [k] \in \mathbb{Z}_m$ \square

Observación: En el P2(b) y en la P3 he usado el siguiente hecho: Si (A, Δ) es una estructura algebraica y $(G, *)$ es un grupo, entonces si

$f: (A, \Delta) \rightarrow (B, *)$ es un morfismo, se tiene que $f(e) = e$ donde $e \in A$ es neutro para Δ y $e \in B$ es neutro para $*$

Es "notable" el hecho de que no sea necesario que f sea sobreyectiva cuando el conjunto de llegada es un grupo. (Notar que sobre el conjunto de partida no hay mayores exigencias que ser estructura y tener neutro e .)

P4 | Dado $(G, *)$ un grupo y H subgrupo de G , definamos para $a \in G, b \in G$

$$a * H = \{a * h \mid h \in H\} \quad H * b = \{h * b \mid h \in H\}$$

Pruebe que:

(a) Si $c \in G$, entonces $c \in H \Leftrightarrow c * H = H$

$$\Rightarrow \mu = a * \underbrace{\underbrace{h_1}_{\in H} * \underbrace{h_2^{-1}}_{\in H}}_{\in H} * \underbrace{h_1}_{\in H} \in a * H.$$

(H subgrupo) \square

(4)

(c) Probemos que H es subgrupo de G

(1) $H \subseteq G$ \checkmark

(2) $H \neq \emptyset$ pues $e \in H$ ya que $F(e) = e$
 (Pues F homomorfismo y el espacio de llegada es un grupo)

(3) $\forall h_1, h_2 \in H \Rightarrow h_1 * h_2^{-1} \in H$

En efecto, si $h_1 \in H \Rightarrow F(h_1) = e$
 $h_2 \in H \Rightarrow F(h_2) = e$ \downarrow f es homomorfismo

Luego $h_1 * h_2^{-1} \in H$ pues $F(h_1 * h_2^{-1}) = F(h_1) * F(h_2^{-1})$
 $(*) \quad \quad \quad = F(h_1) * (F(h_2))^{-1}$
 $\quad \quad \quad = e * e^{-1} = e$

EN LA CUAL a TIENE INVERSO a^{-1}

estructura

(*) HE USADO EL HECHO DE QUE SI $f : (A, \Delta) \rightarrow (G, *)$ ES UN HOMOMORFISMO, ENTONCES $(f(a))^{-1} = f(a^{-1})$ \uparrow

FINALMENTE probemos que $a * H = H * a$ (GRUPO NUEVAMENTE NO NECESITO INJECTIVIDAD)

(1) $a * H \subseteq H * a$. SEA $x \in a * H$
 $\Rightarrow x = a * h$ ($h \in H$) $\uparrow F(h) = e$

YO QUIERO:
 $x \in H * a \Leftrightarrow x = \tilde{h} * a$
 o SEA $a * h = \tilde{h} * a / a^{-1}$
 $a * h * a^{-1} = \tilde{h}$

$\tilde{h} \in H$

$\Rightarrow x = \underbrace{(a * h * a^{-1})}_{\tilde{h}} * a \in H * a$

SIEMPRE y CUANDO $\tilde{h} \in H$, o SEA $F(\tilde{h}) = e$

NOTAR QUE ES IGUAL A $a * h$

PERO $F(\tilde{h}) = F(a * h * a^{-1})$
 $= F(a) * F(h) * F(a^{-1})$
 $= F(a) * e * F(a^{-1})$
 $= F(a) * (F(a))^{-1} = e$

(2) $H * a \subseteq a * H$. ANÁLOGAMENTE SEA $x \in H * a$

$\Rightarrow x = h * a$ CON $h \in H$ ($F(h) = e$)

$\Rightarrow x = a * \underbrace{(a^{-1} * h * a)}_{\tilde{h}} \in a * H$

DE RAZONA EN FORMA ANÁLOGA

pues $\tilde{h} \in H$ ya que $F(\tilde{h}) = F(a^{-1} * h * a) = e$ \downarrow EN FORMA ANÁLOGA. \square

P5] Sea $(G, *)$ un grupo y G' un subgrupo de G . ①

Sea $f: G \rightarrow G$ un homomorfismo de grupos que satisface la propiedad $f(G') \subseteq G'$. Se define el conjunto

$$V = \{g \in G \mid \exists m \in \mathbb{N}, f^m(g) \in G'\}$$

donde f^m es la composición de f con ella misma m veces y $f^0 = \text{id}_G$. Probar que V es un subgrupo de G .

Indicación: Pruebe que:

$$f^m(g) \in G' \Rightarrow f^{m+1}(g) \in G' \quad g \in G, m \in \mathbb{N}$$

Concluir que si $f^m(g) \in G' \Rightarrow (\forall m \geq n) f^m(g) \in G'$
(Control Recuperativo, 1998)

Solución:

Problemas primero la indicación:

$$\text{Si } f^m(g) \in G' \Rightarrow f^{m+1}(g) = f(\underbrace{f^m(g)}_{\in G'})$$

$$\text{Luego } f^{m+1}(g) \in f(G') \subseteq G'$$

↑ IMAGEN

↑ Propiedad del problema

∴ $f^{m+1}(g) \in G'$. Luego hemos probado que:

$$f^m(g) \in G' \Rightarrow f^{m+1}(g) \in G'$$

$$\text{pero entonces } f^{m+1}(g) \in G' \Rightarrow f^{m+2}(g) \in G'$$

$$\text{y } f^{m+2}(g) \in G' \Rightarrow f^{m+3}(g) \in G'$$

$$\begin{aligned} \text{o sea } f^m(g) \in G' &\Rightarrow f^{m+1}(g) \in G' \wedge f^{m+2}(g) \in G' \\ &\wedge f^{m+3}(g) \in G' \wedge \dots \wedge f^m(g) \in G' \\ &\Leftrightarrow (\forall m \geq n) f^m(g) \in G' \end{aligned}$$

Pd q: V subgrupo de G

$$\textcircled{1} V \subseteq G \quad \checkmark$$

$$\textcircled{2} V \neq \emptyset \text{ pues } G' \subseteq V \text{ ya que si } \underbrace{\text{id}(g)}_{f^0(g)} \\ g \in G' \Rightarrow \exists m=0 \text{ tal que } f^m(g) = g \\ \text{y } f^0(g) \in G' \\ \uparrow \text{Esto es lo importante.}$$

$$\Rightarrow g \in V$$

③ Sabemos que la composición de homomorfismos es homomorfismo por lo cual f^m es un homomorfismo, o sea

$$f^m(g_1 * g_2) = f^m(g_1) * f^m(g_2)$$

Probaremos finalmente que si $g_1, g_2 \in V$ se tendrá ⁹
 que $g_1 * g_2^{-1} \in V$

Luego basta encontrar un $m \in \mathbb{N}$ tal que
 $f^m(g_1 * g_2^{-1}) \in G' \leftarrow$ la condición para
 estar en V

Ahora como $g_1, g_2 \in V$, $\exists m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^{m_1}(g_1) \in G' \text{ y } f^{m_2}(g_2) \in G'$$

Si $m = \max\{m_1, m_2\}$ que es mayor o igual a m_1 y a m_2 se tendrá por la indicación (que ya probamos) que

$$f^m(g_1) \in G' \text{ y } f^m(g_2) \in G'$$

Ahora verifiquemos que este es el m buscado:

$$f^m(g_1 * g_2^{-1}) = f^m(g_1) * f^m(g_2^{-1}) = f^m(g_1) * (f^m(g_2))^{-1}$$

\uparrow homomorfismo

Propiedad de
 los homomorfismos
 donde el conjunto de
 "llegada" es un "grupo"

y como $f^m(g_1) \in G'$, $f^m(g_2) \in G'$ (Luego $(f^m(g_2))^{-1} \in G'$)

y G' es cerrada para la operación $*$

\uparrow
 G' subgrupo
 de G .

$$\therefore f^m(g_1 * g_2^{-1}) \in G' \quad \square$$

G' subgrupo
 de G .

P6 Sea $(G, *)$ un grupo y $f: G \rightarrow G$

$$g \rightarrow f(g) = g^{-1}$$

Probar que f es isomorfismo $\Leftrightarrow G$ es grupo
 abeliano.

Solución:

(Control 3, 1996)

Notar que f tiene sentido, pues g^{-1} existe (G es grupo)
 y vive en G . Notemos además que f es biyectiva pues
 tiene inversa (que por cierto es ella misma) pues:

$$(f \circ f)(g) = f(f(g)) = f(g^{-1}) = (g^{-1})^{-1} = g$$

$$\text{o sea } f \circ f = \text{id}_G$$

Luego nuestro problema se reduce pues

$$f \text{ isomorfismo} \Leftrightarrow f \text{ homomorfismo} \wedge f \text{ biyectiva}$$

$$\Leftrightarrow f \text{ homomorfismo.}$$

Ahi solo basta probar que f homomorfismo $\Leftrightarrow G$ es un
 grupo
 abeliano.

$$(\Leftarrow) \text{ Pdg: } f \text{ homomorfismo, o sea } f(a * b) = f(a) * f(b)$$

\leftarrow Pues $*$ es la
 operación que "manda"
 en el conjunto de
 partida y en el de llegada

Pero $f(a*b) = (a*b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1} = a^{-1} * b^{-1} = f(a) * f(b)$ (10)

↑
PUES G ES GRUPO ABELIANO.

(\Rightarrow) Si f homomorfismo $\Rightarrow f(a*b) = f(a) * f(b)$
 (Pdq: G ABELIANO) $\Leftrightarrow (a*b)^{-1} = a^{-1} * b^{-1}$
 $\Leftrightarrow b^{-1} * a^{-1} = a^{-1} * b^{-1} (*)$

Pdq: $x*y = y*x (\forall x, y \in G)$
 Tomando en $(*) \rightarrow a = x^{-1}$
 $b = y^{-1} \Rightarrow (y^{-1})^{-1} * (x^{-1})^{-1} = (x^{-1})^{-1} * (y^{-1})^{-1}$
 $\Rightarrow y * x = x * y \quad \blacksquare$

P7 CONSIDERE $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ CON LA OPERACIÓN DEFINIDA POR
 $(a, b) \oplus (c, d) = (a +_2 c, b +_3 d)$

- (a) PRUEBE QUE $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus)$ ES UN GRUPO.
 (b) CONSTRUYA UN ISOMORFISMO $f: (\mathbb{Z}_6, +_6) \rightarrow (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus)$
 tal que $f([1]_6) = ([1]_2, [1]_3)$. CONCLUYA QUE ES
 ÚNICO (CONTROL 3, 1996)

SOLUCIÓN:

(a) Pdq: $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus)$ ES GRUPO.

(SABEMOS QUE $(\mathbb{Z}_2, +_2)$ Y $(\mathbb{Z}_3, +_3)$ SON GRUPOS)

① \oplus ES l.c.i. EN $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ PUES EN CADA COMPONENTE ACTUA UNA l.c.i.

② \oplus ES ASOCIATIVA: PRUEBENLO USTEDES! (ES POR QUE SE TIENE ASOCIATIVIDAD EN CADA COMPONENTE.)

③ ELEMENTO NEUTRO: ESTE ES $([0]_2, [0]_3)$ PUES
 $([a]_2, [b]_3) \oplus ([0]_2, [0]_3) = ([a]_2 +_2 [0]_2, [b]_3 +_3 [0]_3)$
 $= ([a + 0]_2, [b + 0]_3)$
 $= ([a]_2, [b]_3)$

ANÁLOGAMENTE $([0]_2, [0]_3) \oplus ([a]_2, [b]_3) = ([a]_2, [b]_3)$

④ INVERSO: DADO $([a]_2, [b]_3) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ SU INVERSO ES $([-a]_2, [-b]_3) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ PUES

$$([a]_2, [b]_3) \oplus ([-a]_2, [-b]_3) = ([a]_2 +_2 [-a]_2, [b]_3 +_3 [-b]_3)$$

$$= ([a - a]_2, [b - b]_3)$$

$$= ([0]_2, [0]_3) \leftarrow \text{EL NEUTRO}$$

ANÁLOGAMENTE $([-a]_2, [-b]_3) \oplus ([a]_2, [b]_3) = ([0]_2, [0]_3) \leftarrow$
 LUEGO $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus)$ ES GRUPO (DE HECHO ES ABELIANO)
 ↑ CONVENCIÉNDSE! \blacksquare

(b) RECORDAMOS QUE

$$\mathbb{Z}_6 = \{ [0]_6, [1]_6, \dots, [5]_6 \}$$

$$\mathbb{Z}_2 = \{ [0]_2, [1]_2 \}$$

$$\mathbb{Z}_3 = \{ [0]_3, [1]_3, [2]_3 \}$$

Luego $|\mathbb{Z}_6| = 6$ y $|\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3| = 6$. Luego tiene sentido ⁽¹⁾
 buscar un isomorfismo (pues tendrá que ser en particular biyectivo y por lo tanto el conjunto de partida y llegada tendrán el mismo "cardinal")
 Como es un isomorfismo, en particular será un homomorfismo el cual lleva el neutro de \mathbb{Z}_6 al neutro de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ (Pues $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus)$ es un grupo)
 \uparrow Conjunto de Llegada \nwarrow Parte (a)

Luego $f([0]_6) = ([0]_2, [0]_3)$ y por enunciado

$$f([1]_6) = ([1]_2, [1]_3)$$

$$\begin{aligned} \text{Así } f([2]_6) &= f([1]_6 +_6 [1]_6) = f([1]_6) \oplus f([1]_6) \\ &= ([1]_2, [1]_3) \oplus ([1]_2, [1]_3) \\ &= ([2]_2, [2]_3) = ([0]_2, [2]_3) \end{aligned}$$

ANALOGAMENTE:

$$f([3]_6) = f([1]_6 +_6 [1]_6 +_6 [1]_6) = f([1]_6) \oplus f([1]_6) \oplus f([1]_6)$$

$$\xrightarrow{\text{análogo}} = ([3]_2, [3]_3) = ([1]_2, [0]_3)$$

al cálculo de $f([2]_6)$

$$f([4]_6) = ([4]_2, [4]_3) = ([0]_2, [1]_3)$$

$$f([5]_6) = ([5]_2, [5]_3) = ([1]_2, [2]_3)$$

y notamos que

$$f([6]_6) = ([6]_2, [6]_3) = ([0]_2, [0]_3)$$

$f([0]_6) \leftarrow$ Es consistente con el principio.

Como vemos existe una única forma de asignar a cada elemento de \mathbb{Z}_6 un elemento de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ (uno distinto para cada elemento de \mathbb{Z}_6) por lo que la fm. f es biyectiva y es tal que:

$$f([k]_6) = ([k]_2, [k]_3)$$

Luego es un homomorfismo pues

$$\begin{aligned} f([k_1]_6 +_6 [k_2]_6) &= f([k_1 + k_2]_6) \\ &= ([k_1 + k_2]_2, [k_1 + k_2]_3) = ([k_1]_2 + [k_2]_2, [k_1]_3 + [k_2]_3) \\ &= ([k_1]_2, [k_1]_3) \oplus ([k_2]_2, [k_2]_3) \leftarrow \text{Por definición de } \oplus \\ &= f([k_1]_6) \oplus f([k_2]_6) \end{aligned}$$

Finalmente como f es homomorfismo y es biyectiva, entonces f es un isomorfismo \blacksquare

P8 Sea $(G, *)$ un grupo con neutro $e \in G$. Se define el conjunto A por:

$$A = \{ F : G \rightarrow G / F \text{ es un isomorfismo de } (G, *) \text{ en } (G, *) \}$$

i) Probar que (A, \circ) es un grupo ("o" es la composición de funciones) (12)

ii) Para cada $g \in G$ se define la fm. $F_g: G \rightarrow G$ tal que $F_g(x) = g * x * g^{-1}$. Pruebe que:

a) F_g es un homomorfismo de $(G, *)$ en $(G, *)$

b) $F_{g*h} = F_g \circ F_h$ para todo $g, h \in G$

c) $F_e = \text{id}_G$

Concluya que F_g es un isomorfismo y que $(F_g)^{-1} = F_{g^{-1}}$ para todo $g \in G$.

iii) Pruebe que $B = \{F_g / g \in G\}$ es un subgrupo de (A, \circ) .
(Control 3, 1997)

Solución:

i) ① "o" es l.c.i. en A, o sea $f, g \in A \Rightarrow f \circ g \in A$

Como $f, g \in A$, entonces $f: G \rightarrow G$, $g: G \rightarrow G$, f, g biyectivas y f, g homomorfismos.

Notemos que $f \circ g: G \rightarrow G$ es biyectiva (Pues es composición de biyectivas). Solo queda probar que $f \circ g$ es un homomorfismo (o sea que composición de homomorfismos es homomorfismo ← Este hecho lo asumí en la PS)

$$\begin{aligned} \text{Sean } x_1, x_2 \in G \Rightarrow (f \circ g)(x_1 * x_2) &= f(g(x_1 * x_2)) \quad \begin{matrix} g \text{ es} \\ \text{homomorfismo} \end{matrix} \\ &= f(g(x_1) * g(x_2)) \\ &\quad \begin{matrix} f \text{ es} \\ \text{homomorfismo} \end{matrix} \\ &= f(g(x_1)) * f(g(x_2)) \\ &= (f \circ g)(x_1) * (f \circ g)(x_2) \end{aligned}$$

② "o" asociativa en A. La composición de funciones es asociativa, en particular las de A cumplen la propiedad asociativa.

③ Elemento neutro.

Buscamos $\tilde{f}: G \rightarrow G$ isomorfismo (o sea $\tilde{f} \in A$)

tal que $\forall f \in A \quad f \circ \tilde{f} = \tilde{f} \circ f = f$. (*)

Entonces pensamos en $\tilde{f} = \text{id}_G$ que satisface (*) por lo que solo debemos probar que es un isomorfismo.

Pero id_G es biyectiva y

$$\text{id}_G(x_1 * x_2) = x_1 * x_2 = \text{id}_G(x_1) * \text{id}_G(x_2) //$$

④ Inverso.

Dado $f \in A$ ($f: G \rightarrow G$ un isomorfismo) necesitamos dar con un maravilloso $\hat{f} \in A$ tal que

$$(*) \quad f \circ \hat{f} = \hat{f} \circ f = \text{id}_G \leftarrow \text{Neutro de } (A, \circ)$$

Debemos que $\hat{f} = f^{-1}$ satisface (*) así que solo probaremos que es un isomorfismo.

Pero f^{-1} es biyectiva (pues f lo es) y solo nos queda ⁽¹³⁾ probar que f^{-1} es un homomorfismo (seguramente usando el hecho de que f es un homomorfismo.), es decir:
 $(\forall x_1, x_2 \in G) f^{-1}(x_1 * x_2) = f^{-1}(x_1) * f^{-1}(x_2)$ (Nota: $f^{-1}: G \rightarrow G$)

Sea $u = f^{-1}(x_1)$ y $v = f^{-1}(x_2)$

Pues " f homomorfismo"

$\therefore f(u) = x_1$ y $f(v) = x_2$

Luego $f^{-1}(x_1 * x_2) = f^{-1}(f(u) * f(v)) = f^{-1}(f(u * v))$
 $= u * v$
 $= f^{-1}(x_1) * f^{-1}(x_2) \quad \square$

ii) a) Pdg: $F_g(x_1 * x_2) = F_g(x_1) * F_g(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in G$

En efecto: $F_g(x_1) * F_g(x_2) = (g * x_1 * g^{-1}) * (g * x_2 * g^{-1})$

$\xrightarrow{\text{asociatividad}} = g * x_1 * (g^{-1} * g) * x_2 * g^{-1}$

$= g * (x_1 * e) * x_2 * g^{-1}$

$= g * (x_1 * x_2) * g^{-1} = F_g(x_1 * x_2)$

b) Pdg: $F_{g * h}(x) = (F_g \circ F_h)(x) \quad \forall x \in G$

En efecto $(F_g \circ F_h)(x) = F_g(F_h(x)) = F_g(h * x * h^{-1})$

$= g * (h * x * h^{-1}) * g^{-1}$

$\xrightarrow{\text{asociatividad}} = (g * h) * x * (h^{-1} * g^{-1})$

$= (g * h) * x * (g * h)^{-1}$

$\xrightarrow{e^{-1} = e} = F_{g * h}(x)$

c) $F_e(x) = e * x * e^{-1} = e * x * e = x = \text{id}_G(x)$

$\therefore F_e = \text{id}_G$

FINALMENTE VEAMOS QUE F_g ES UN ISOMORFISMO.

EN EFECTO VEAMOS QUE

$F_g \circ F_{g^{-1}} = F_{g * g^{-1}} = F_e = \text{id}_G$

y $F_{g^{-1}} \circ F_g = F_{g^{-1} * g} = F_e = \text{id}_G$
(b) (c)

O SEA F_g TIENE INVERSA IGUAL A $F_{g^{-1}}$ (O SEA $(F_g)^{-1} = F_{g^{-1}}$) y por lo tanto es biyectiva y por (a), F_g ES UN HOMOMORFISMO y por lo tanto ES UN ISOMORFISMO. \square

iii) Pdg: $B = \{F_g / g \in G\}$ ES UN SUBGRUPO DE (A, \circ)

① $B \subseteq A$ PUES PROBAMOS QUE LOS F_g SON ISOMORFISMOS. Como A CONTIENE A TODOS LOS ISOMORFISMOS, EN PARTICULAR DEBE TENER A LOS DE B .

② $B \neq \emptyset$. Como G grupo $\Rightarrow e \in G$. Luego $F_e \in B$, O SEA $\text{id}_G \in B$. $\therefore B \neq \emptyset$.

③ Sean $F_g, F_h \in B$. P.d.q $F_g \circ (F_h)^{-1} \in B$ (14)

Pero $F_g \circ (F_h)^{-1} = F_g \circ F_{h^{-1}} = F_{g * h^{-1}} \in B$

\uparrow Por parte (2) \uparrow Por (b) \uparrow pues $g * h^{-1} \in G$
 ya que $g, h \in G$ y G es grupo

$\circ (B, \circ)$ es un subgrupo de (A, \circ) . \square

P9 | Sea $(G, *)$ un grupo, X un conjunto no vacío y una función $\varphi: G \times X \rightarrow X$
 $(g, x) \rightarrow \varphi(g, x)$

Denotaremos $\varphi(g, x)$ por $g \cdot x$. Supongamos que φ satisface:

a) $(\forall x \in X) e \cdot x = x$, e neutro de $(G, *)$
 b) $(\forall x \in X) (\forall g, h \in G) g \cdot (h \cdot x) = (g * h) \cdot x$

Dado $x_0 \in X$, sea $H_{x_0} = \{g \in G \mid g \cdot x_0 = x_0\}$

- (i) Pruebe que H_{x_0} es un subgrupo de $(G, *)$
 (ii) Sean $x_0, y_0 \in X$, $g_0 \in G$ tales que $g_0 \cdot x_0 = y_0$.
 Demuestre que:

$$H_{x_0} = \{g_0^{-1} * h * g_0 \mid h \in H_{y_0}\}$$

(iii) Sea R_{x_0} la relación de equivalencia en G definida por $g R_{x_0} h \Leftrightarrow g^{-1} * h \in H_{x_0}$.

(iii.1) Pruebe que $(\forall g, h \in G) [g] = [h] \Rightarrow g \cdot x_0 = h \cdot x_0$
 Conside

$$f: G/R_{x_0} \rightarrow X$$

$$[g] \rightarrow g \cdot x_0$$

(iii.2) Demuestre que f es inyectiva.

(iii.3) Suponga que se verifica que:

$$(\forall x, y \in X) (\exists g \in G) y = g \cdot x$$

Pruebe que entonces f es biyectiva

(Control 3, 1992)

Solución:

(i) Notemos previamente que $g \cdot x = y \Rightarrow x = g^{-1} \cdot y$

Esto es debido a que $g \cdot x = y \mid g^{-1}$

Por (b)

$$\Rightarrow g^{-1} \cdot (g \cdot x) = g^{-1} \cdot y$$

$$\Rightarrow (g^{-1} * g) \cdot x = g^{-1} \cdot y$$

$$\Rightarrow e \cdot x = g^{-1} \cdot y = x$$

por (a)

\uparrow $g \in G$
 \uparrow $x, y \in X$

Probamos ahora que H_{x_0} es subgrupo de $(G, *)$.

$$(1) H_{x_0} \subseteq G \checkmark$$

$$(2) H_{x_0} \neq \emptyset \text{ pues } e \in H_{x_0} \text{ y } e \cdot x_0 = x_0 \text{ (Por (a))}$$

$$(3) \text{Pdq: } g_1, g_2 \in H_{x_0} \Rightarrow g_1 * g_2^{-1} \in H_{x_0}$$

$$\text{Pero } g_1, g_2 \in H_{x_0} \Rightarrow g_1 \cdot x_0 = x_0 \wedge g_2 \cdot x_0 = x_0$$

$$\Rightarrow g_2^{-1} \cdot x_0 = x_0 \text{ (Propiedad ya probada)}$$

$$\text{Luego } g_1 * g_2^{-1} \in H_{x_0} \text{ pues } (g_1 * g_2^{-1}) \cdot x_0 = g_1 \cdot (g_2^{-1} \cdot x_0)$$

$$\text{Por (b)} = g_1 \cdot x_0 = x_0 \quad \blacksquare$$

$$(ii) \text{ Sea } \mathcal{C} = \{g_0^{-1} * h * g_0 / h \in H_{y_0}\}. \text{ Probemos que } \mathcal{C} = H_{x_0},$$

$$\text{o sea } \mathcal{C} \subseteq H_{x_0} \text{ y } H_{x_0} \subseteq \mathcal{C}$$

$$(1) \mathcal{C} \subseteq H_{x_0}. \text{ Sea } x \in \mathcal{C} \Rightarrow x = g_0^{-1} * h * g_0 \text{ para algún } h \in H_{y_0}$$

$$\text{Pdq } x \in H_{x_0}, \text{ o sea: } x \cdot x_0 = x_0 \Rightarrow h \cdot y_0 = y_0$$

$$\text{Efectivamente } x \cdot x_0 = (g_0^{-1} * h * g_0) \cdot x_0 = (g_0^{-1} * h) \cdot (g_0 \cdot x_0) \text{ Por (b)}$$

IMAGINENLO
COMO UN

$$(a * g_0) \cdot x_0$$

$$= a \cdot (g_0 \cdot x_0)$$

$$\text{con } a = g_0^{-1} * h$$

$$= (g_0^{-1} * h) \cdot y_0 \quad \text{Hipotesis del problema.}$$

$$= g_0^{-1} \cdot (h \cdot y_0)$$

$$= g_0^{-1} \cdot y_0$$

$$= x_0 //$$

$$\text{Pero } g_0 \cdot x_0 = y_0$$

$$\Rightarrow x_0 = g_0^{-1} \cdot y_0 (*)$$

$$(2) H_{x_0} \subseteq \mathcal{C}. \text{ Sea } x \in H_{x_0}, \text{ o sea } x \cdot x_0 = x_0$$

$$\text{Pdq } x \in \mathcal{C}, \text{ o sea que es de la forma } g_0^{-1} * h * g_0 \text{ para algún } h \in H_{y_0}$$

$$\text{Notamos que } x = g_0^{-1} * (g_0 * x * g_0^{-1}) * g_0$$

$$\text{Luego solo basta probar que } h \in H_{y_0}, \text{ o sea } h \cdot y_0 = y_0. \text{ En efecto:}$$

$$(g_0 * x) * g_0^{-1} \cdot y_0 = (g_0 * x) \cdot (g_0^{-1} \cdot y_0)$$

MISMO
ARGUMENTO
USADO
ANTES

$$= (g_0 * x) \cdot (x_0) \text{ Por (*)}$$

$$= g_0 \cdot (x \cdot x_0) \text{ Por (b)}$$

$$= g_0 \cdot x_0 \text{ pues } x \in H_{x_0}$$

$$= y_0 \text{ ENUNCIADO DEL PROBLEMA. } \blacksquare$$

$$(iii) (iii.1) \text{ Si } [g] = [h] \Rightarrow g R_{x_0} h \Rightarrow g^{-1} * h \in H_{x_0}$$

$$\Rightarrow (g^{-1} * h) \cdot x_0 = x_0$$

$$\text{Propiedad probada al principio. } \Rightarrow g^{-1} \cdot (h \cdot x_0) = x_0$$

$$\Rightarrow h \cdot x_0 = g \cdot x_0 \quad \blacksquare$$

(iii.2) $\forall g, f([g]) = f([h]) \Rightarrow [g] = [h]$ (16)
 Pero si $f([g]) = f([h]) \Rightarrow g \cdot x_0 = h \cdot x_0$
 Propiedad probada al principio. $\Rightarrow x_0 = g^{-1} \cdot (h \cdot x_0)$ Por (b)
 $\Rightarrow x_0 = (g^{-1} * h) \cdot x_0$
 $\Rightarrow g^{-1} * h \in R_{x_0}$
 $\Rightarrow g R_{x_0} h \Rightarrow [g] = [h]$

(iii.3) $\forall y \in X (\exists [g] \in G/R_{x_0}) f([g]) = y$
 En efecto, dado $y \in X$ y $x_0 \in X$ (el de la relación)
 $\circ \circ \exists \tilde{g} \in G$ tal que $y = \tilde{g} \cdot x_0$ (Por propiedad del enunciado)

Entonces la clase a tomar en G/R_{x_0} es justamente la que tiene a \tilde{g} como representante pues
 $f([\tilde{g}]) = \tilde{g} \cdot x_0 = y$ ▀

Notar que (iii.1) nos dice que la fm. f está bien definida.

PROBLEMA Sea $(G, *)$ un grupo con neutro e tal que G es finito

(i) Para $h \in G$ cualquiera pruebe que
 $f: \mathbb{N} \rightarrow G$ tal que $f(m) = h^m = \underbrace{h * \dots * h}_{m \text{ veces}}$

NO ES INYECTIVA. Concluya que $\exists m > 0$
 tal que $h^m = e$.

(ii) Sea $H \subseteq G$, $H \neq \emptyset$ tal que si $h, h' \in H \Rightarrow h * h' \in H$

(ii.1) Pruebe que si $h \in H$, entonces $h^{-1} \in H$.

(ii.2) Concluya que H es un subgrupo de G .
 (Control Recuperativo, 2001)

Solución:

(i) Si f fuera inyectiva $\Rightarrow |\mathbb{N}| < |G|$ (⚡)
 finito

Luego f NO ES INYECTIVA, por lo

que $\exists i, j \in \mathbb{N}$ ($i \neq j$) tal que $f(i) = f(j)$

Luego $h^i = h^j$ y supongamos $i > j$
 (No hay pérdida de generalidad)

$\Rightarrow h^{i-j} * h^j = h^j$ Por cancelabilidad
 $\Rightarrow h^{i-j} = e$ (G un grupo)
 con $i-j > 0$

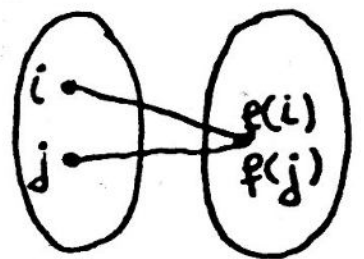
Luego el m buscado es $i-j \in \mathbb{N}$. ($i-j = m > 0$)

(ii) (ii.1) Si $h \in H$, $\exists m > 0$ tq $h^m = e$

Luego $h * h^{m-1} = h^{m-1} * h = e$

Por unicidad del inverso, h^{m-1} es el inverso de h

$\forall g, h^{m-1} \in H$.



Hay 2 casos. (Como $m > 0$)

$m=1$ y $m > 1$

Si $m=1$ hay que probar que $h^0 = e \in H$

Pero $e = h^m$ ($m > 0$) que es producto de elementos de H , por lo que por propiedad de enunciado $\frac{h^m}{e} \in H$ (con $m > 0$)

Si $m > 1$ ($m-1 > 0$), hay que probar que $h^{m-1} \in H$.


Pero por la misma propiedad anterior h^{m-1} está en H por ser producto de elementos de H . ← pues $(m-1) > 0$

(ii.2) Por lo anterior, $e \in H \Rightarrow H \neq \emptyset$

y por enunciado $H \subseteq G$

Luego basta probar que $\forall h_1, h_2 \in H \Rightarrow h_1 * h_2^{-1} \in H$

Pero $h_2 \in H \Rightarrow h_2^{-1} \in H$ (Por (i.1))

y por lo tanto $h_1, h_2^{-1} \in H$. Luego $h_1 * h_2^{-1} \in H$ (Por prop. en el enunciado) 

Notar que en el fondo hemos probado que para grupos finitos (H) solo basta probar la cerradura de la operación $*$ en H .

P11 (Propuesto)

(a) Sea $(G, *)$ un grupo que verifica la propiedad $(\forall a, b \in G) (a * b)^2 = a^2 * b^2$. Probar que $(G, *)$ es un grupo abeliano.

(b) Sean $G = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / \exists a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, f(x) = ax + b\}$ y $\bar{G} = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / \exists b \in \mathbb{R}, f(x) = x + b\}$. Sabiendo que (G, \circ) es un grupo, probar que (\bar{G}, \circ) es un subgrupo de (G, \circ) (Control Recuperativo, 1996)

P12 (Desafío) Sea $(G, *)$ un grupo que satisface las siguientes propiedades.

(I) $(a * b)^2 = (b * a)^2 \quad \forall a, b \in G$

(II) $x^2 = e \Rightarrow x = e$ (e neutro para $*$ en G)

Probar que $(G, *)$ es un grupo abeliano.

(Anillos y Cuerpos en clase auxiliar)

P13 (i) Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto numerable. Se define

$$-X = \{-x / x \in X\}$$

Demuestre que el conjunto $X \cup -X$ es numerable.

(ii) Sean A, B, C conjuntos tales que

$$A \cap B = \emptyset, A \cap C = \emptyset \quad |B| = |C|$$

Demuestre que $|A \cup B| = |A \cup C|$ (Control 3, 1993)

1 Solución 8

(i) DEMOSTREMOS QUE $-X$ ES NUMERABLE. PARA ELLO DEFINAMOS (18)
LA BIYECCIÓN NATURAL ENTRE X Y $-X$

$$\phi: X \rightarrow -X \quad (\text{PUEBEN QUE ES BIYECCIÓN})$$

LUEGO $|X| = |-X| \Rightarrow -X$ ES NUMERABLE PUES X LO ES.

Así $X \cup -X$ ES NUMERABLE. (ES UNIÓN FINITA DE NUMERABLES.
NOTA: INCLUSO LA UNIÓN "NUMERABLE" DE NUMERABLES ES NUMERABLE. ▣

(ii) Como $|B| = |C| \Rightarrow \exists \phi: B \rightarrow C$ UNA f.m. biyectiva.

Pd q: $|A \cup B| = |A \cup C|$, O SEA:

Pd q: $\exists \varphi: A \cup B \rightarrow A \cup C$ BIYECTIVA.

$$\text{SEA } \varphi(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in A \\ \phi(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$

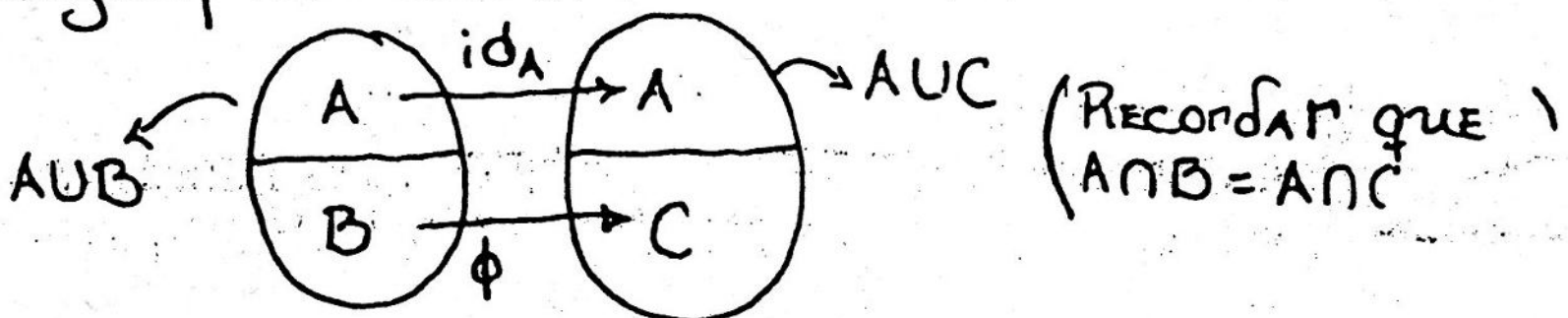
NOTEMOS QUE ESTA BIEN DEFINIDA PUES A Y B SON DISJUNTOS (O SEA QUE $\varphi(x)$ NO PUEDE TOMAR 2 VALORES DISTINTOS)

$\hookrightarrow \varphi(x) = x$ y $\varphi(x) = \phi(x)$
NO VA A OCUPAR

NOTEMOS QUE SI $x \in A \Rightarrow \varphi(x) = x \in A$

y QUE SI $x \in B \Rightarrow \varphi(x) \in C$ ($\phi: B \rightarrow C$)

LUEGO φ ES COMO:



PROBEMOS QUE φ ES BIYECTIVA.

① φ INYECTIVA: PROBEMOS QUE $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$

CASOS: $x_1, x_2 \in A$ y $x_1 \neq x_2$

$$\Rightarrow \varphi(x_1) = x_1 \neq x_2 = \varphi(x_2)$$

$x_1, x_2 \in B$ y $x_1 \neq x_2$

$$\Rightarrow \phi(x_1) \neq \phi(x_2) \Rightarrow \frac{\varphi(x_1)}{\phi(x_1)} = \frac{\varphi(x_2)}{\phi(x_2)}$$

PUES ϕ INYECTIVA (PUES ES BIYECTIVA)

$x_1 \in A$ y $x_2 \in B$

$\Rightarrow \varphi(x_1) \in A$ y $\varphi(x_2) \in C$ (VER DIBUJO)

$\Rightarrow \varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$ PUES $A \cap C = \emptyset$

② φ EPYECTIVA: PROBEMOS QUE $(\forall y \in A \cup C)(\exists x \in A \cup B)$

TAL QUE $\varphi(x) = y$. HAY DOS CASOS:

SI $y \in A \Rightarrow \exists x = y \in A \cup B$ TAL QUE $\varphi(x) = \varphi(y) = y$

Lo cual era esperado, pues al preguntarnos: ¿Quién responde por "y" $\in A$? nos contestamos que el mismo y pero en el conjunto de partida de φ (Pues φ funciona como la identidad en la "parte de φ " que va de A en A). Ahora si $y \in C$, entonces el "x" que responde por y en este caso no los da la fm. $\phi: B \rightarrow C$. Como ϕ es epiyectiva, dado $y \in C$, $\exists x \in B$, $\phi(x) = y$. Luego ahora $\varphi(x) = \phi(x) = y$ \square
 \uparrow pues $x \in B$

P14 Sea B un conjunto infinito numerable y \leq una relación de orden total definida en B . Pruebe que dado $a \in B$, uno de los dos conjuntos siguientes es infinito numerable

$$B_1 = \{b \in B \mid b \leq a\}, \quad B_2 = \{b \in B \mid a \leq b\}$$

(Control 2, 1999)

Solución:

Notemos que al tener \leq una relación de orden "total" en B , tendremos que dado $b \in B$, $b \leq a$ o $a \leq b$.
 $\therefore b \in B_1$ o $b \in B_2$ (o quizás a ambos). Luego nos queda claro que $B = B_1 \cup B_2$

(Pues $B_1 \cup B_2 \subseteq B$ es claro y $B \subseteq B_1 \cup B_2$ lo acabo de explicar)

Así alguno (B_1 ó B_2) es infinito pues B es infinito. (Si B_1 y B_2 fueran finitos $\Rightarrow B$ sería finito (\rightarrow "no").) Además cualquiera de los dos que sea, sea un subconjunto de B (numerable) y sea infinito. Luego B_1 ó B_2 sea un subconjunto infinito de un numerable \Rightarrow sea infinito numerable \square

P15 Pruebe que el siguiente conjunto es numerable.

$$C = \{x \in [0, \infty) \mid \exists m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, x^m \in \mathbb{N}\}$$

Indicación: Recuerde que $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ todo real positivo tiene una única raíz m -ésima positiva.
(Control 2, 2000)

Solución:

Solución 1: Fijar m , o sea definir:

$$C_m = \{x \in [0, \infty) \mid x^m \in \mathbb{N}\}$$

$$C = \bigcup_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} C_m$$

La técnica es fijar m para luego "no verlo" por todos los valores posibles. numerable.

He fijado el m para el cual se cumple la propiedad

Luego si pruebo que C_m es numerable, entonces C será unión numerable de numerables, por lo que C será numerable. (20)

Basta probar entonces que $C_m = \{x \in [0, \infty) / x^n \in \mathbb{N}\}$ es numerable. Pero $C_m = \{x \in [0, \infty) / \exists m \in \mathbb{N}, x^m = m\}$

usando el hecho de que cada real tiene una única raíz m -ésima real positiva.

$$\text{Sea } \varphi: \mathbb{N} \rightarrow C_m$$

$$m \rightarrow \sqrt[m]{m}$$

(Nota: En general una f.m. útil es aquella que es tá en la definición de C_m

Prueben que es biyectiva. (Tengan confianza en ustedes y haganlo!)

Luego $|\mathbb{N}| = |C_m| \therefore C_m$ es numerable. \square

Segunda Solución: Sea $\tilde{C}_m = \{x \in [0, \infty) / \exists m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, x^m = m\}$ o sea hemos fijado m y luego:

$$\mathcal{C} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \tilde{C}_m$$

Notemos que $\tilde{C}_m = \{\sqrt[m]{m} / m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

$$\text{Sea } \tilde{\varphi}: \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \tilde{C}_m$$

$$m \rightarrow \sqrt[m]{m}$$

pues cada real tiene una única raíz real positiva.

Prueben que $\tilde{\varphi}$ es epyectiva y que no necesariamente es inyectiva (Pensar en $\tilde{\varphi}: \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \tilde{C}_1$)

Luego $|\mathbb{N} \setminus \{0\}| \geq |\tilde{C}_m|$. Prueben que $\tilde{\varphi}: \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \tilde{C}_m$

es biyectiva si $m \neq 0$ y $m \neq 1$:

$$\text{Luego } \mathcal{C} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \tilde{C}_m$$

$\Rightarrow |\tilde{C}_m|$ es finito para $m=0, 1$

es unión numerable de conjuntos a lo mas numerable (finito o numerable) y \tilde{C}_m numerable si $m \geq 2$

"numerable" $\Rightarrow \mathcal{C}$ es numerable \square

$\uparrow \tilde{C}_2, \tilde{C}_3, \dots$

Notar que la segunda solución es bastante mas complicada que la primera, lo cual se basa en que $\sqrt[m]{m}$ (la función clave) es inyectiva como f.m. de m pero no como f.m. de m . Es "importantísimo" notar que no siempre tendrían una f.m. biyectiva (Quizás solo sea inyectiva o solo sea epyectiva)

TAMBIÉN ES CLAVE NOTAR QUE SI $\mathcal{P} = \bigcup_{a \in A} \mathcal{P}_a$ [DONDE A ES NUMERABLE] (21)
 y los \mathcal{P}_a o SON FINITOS O SON NUMERABLES ($|\mathcal{P}_a| \leq |\mathbb{N}|$)
 ES IMPRESCINDIBLE QUE A LO MENOS UNO DE ELLOS SEA NUMERABLE PARA QUE \mathcal{P} SEA NUMERABLE.

Por último, MIRA BIEN LAS EXPRESIONES QUE DALE/ DLE EL CONJUNTO PUES LO MAS PROBABLE ES QUE AHÍ SE ENCUENTRE LA "CLAVE" PARA RESOLVER EL PROBLEMA.

P16 Para todo $m \in \mathbb{N}$ me tiene la función $f_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
 Además $f_1 = \text{id}_{\mathbb{R}}$. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $B = \{f_m(a) / a \in A, m \in \mathbb{N}\}$
 Pruebe que si A es infinito numerable, entonces B es infinito numerable. (Control 2, 2001)

Solución:

Sea $B_m = \{f_m(a) / a \in A\}$ ← Hemos fijado m
 Luego $B = \{f_m(a) / a \in A, m \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{f_m(a) / a \in A\}$
 $= \bigcup_{m \in \mathbb{N}} B_m$

Notemos además que $B_1 = \{f_1(a) / a \in A\} = \{\text{id}_{\mathbb{R}}(a) / a \in A\}$
 $= \{a / a \in A\}$
 $= A.$

Luego B_1 es numerable (Pues A numerable), o sea, por lo menos uno de los B_m es numerable. Luego basta probar de $|B| \leq |\mathbb{N}|$ pues si así fuera, B sería numerable (por lo comentado arriba de esta página.)

Consideremos la función:

solución
 LA DEFINICIÓN DE B_m : $f_m: A \rightarrow B_m$ CLARAMENTE EPIYECTIVA
 $a \rightarrow f_m(a)$ (PRUEBENLO!)

por lo que $|A| \geq |B_m|$

$|\mathbb{N}| \leftarrow$ PUES A ES NUMERABLE \blacksquare

P17 (a) Sea $A = \{x \in \mathbb{R} / \exists k \in \mathbb{Z}, \exists l \in \mathbb{N}, x = \frac{k}{l}\}$

Pruebe que A es numerable. (Control 2, 1998)

(b) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ el conjunto

$A = \{r + n\sqrt{2} / r, n \in \mathbb{Q}\}$

Pruebe que A es infinito numerable

(Control 2, 1992)

(c) Si A y B son conjuntos numerables.

Pruebe que $A \times B$ es numerable.

Resolución:

(a) Resolución 1. (Es mucho más corta, pero en general para problemas más difíciles es mejor dominar la resolución 2)

Los elementos de A son de la forma $\frac{k}{3^i} \in \mathbb{Q}$ ($k \in \mathbb{Z}$) ($i \in \mathbb{N}$)

Luego $A \subseteq \mathbb{Q}$. Además A es infinito pues en particular contiene a los números de la forma $\frac{k}{3^0} = k$ con $k \in \mathbb{Z}$, o sea, contiene a los enteros.

Como A es un subconjunto infinito de un numerable (\mathbb{Q}) tiene que A es numerable.

Resolución 2.

Sea $A_i = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{k}{3^i}\}$ y $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$
 $= \{\frac{k}{3^i} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Sea $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow A_i$. Es fácil probar que φ es biyectiva.
 $k \rightarrow \frac{k}{3^i}$

Luego $|A_i| = |\mathbb{Z}| \Rightarrow A_i$ son numerables

$\Rightarrow A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ es numerable pues es unión numerable de numerables. \square

(b) $A = \{r + d\sqrt{2} \mid r, d \in \mathbb{Q}\} = \bigcup_{d \in \mathbb{Q}} \{r + d\sqrt{2} \mid r \in \mathbb{Q}\}$

Sea $\varphi: \mathbb{Q} \rightarrow A_d$ (Tratar de notar que siempre lo hago igual)
 $r \rightarrow r + d\sqrt{2}$ Hemos fijado d.

Claramente φ es biyectiva.
(Notar que en todos nuestros problemas la epyectividad es casi por construcción de la función)

$\Rightarrow A = \bigcup_{d \in \mathbb{Q}} A_d$ es numerable pues \mathbb{Q} es numerable y es unión numerable de numerables. \square
 $\Rightarrow A_d$ numerable

(c) Debemos que $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

Sea $H_b = \{(a, b) \mid a \in A\} \leftarrow$ Hemos fijado b

$\Rightarrow A \times B = \bigcup_{b \in B} H_b$. Consideremos $\varphi: A \rightarrow H_b$
 $a \rightarrow (a, b)$

No es difícil probar que φ es biyectiva
 $\therefore |A| = |H_b| \Rightarrow H_b$ numerable pues A es numerable.

$\Rightarrow A \times B = \bigcup_{b \in B} H_b$ ES NUMERABLE PUES ES UNIÓN NUMERABLE DE NUMERABLES. (23)

OBSERVACIONES: NOTEMOS QUE CUANDO TENIAMOS:

$$A_1 = \{ \frac{k}{3i} \mid k \in \mathbb{Z} \} \rightsquigarrow \varphi: \mathbb{Z} \rightarrow A_1$$

$\xrightarrow{\quad} k \rightarrow \frac{k}{3i}$

$$A_0 = \{ r + r\sqrt{2} \mid r \in \mathbb{Q} \} \rightsquigarrow \varphi: \mathbb{Q} \rightarrow A_0$$

$\xrightarrow{\quad} r \rightarrow r + r\sqrt{2}$

$$H_b = \{ (a, b) \mid a \in A \} \rightsquigarrow \varphi: A \rightarrow H_b$$

$\xrightarrow{\quad} a \rightarrow (a, b)$

¡¡¡ATEN DE VER LA ANALOGÍA!!!

P18 (Propuesto) Muestre que el conjunto
 $A = \{ (m, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m \leq m \}$
 ES INFINITO NUMERABLE. (Control 3, 1995)

P19 Sea $H = \{ a^b \mid a \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ y } b \in \mathbb{Q} \}$
 Probar que H ES NUMERABLE (Control 3, 1994)

Solución:

LA PRIMERA INTENCIÓN ES DECIR QUE H ES UN SUBCONJUNTO INFINITO DE UN NUMERABLE PERO $2^{\frac{1}{2}} \in H$ ($\sqrt{2} \in H$) O SEA H CONTIENE A NÚMEROS IRRACIONALES. BUSQUEMOS ENTONCES OTRA ALTERNATIVA DE SOLUCIÓN.

$$\text{Sea } H_b = \{ a^b \mid a \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \} \leftarrow \text{Fijo el } b$$

$$\Rightarrow H = \bigcup_{b \in \mathbb{Q}} H_b$$

$$\text{Sea } \varphi: \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow H_b$$

$a \rightarrow a^b$

φ epizectiva "claramente"
 (A VECES LAS COSAS MAS CLARAS SON AQUELLAS QUE MAS CUESTA VER)

φ inyectiva?

$$\varphi(a_1) = \varphi(a_2) \Leftrightarrow a_1^b = a_2^b \stackrel{?}{\Rightarrow} a_1 = a_2$$

EN GENERAL NO SE CUMPLE
 (Por ejemplo si $b=2$)

PERO SI $b=1$, SE CUMPLE

$$\text{Luego } \varphi: \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow H_1 \text{ biyectiva} \Rightarrow \underbrace{|\mathbb{N} \setminus \{0\}|}_{|\mathbb{N}|} = |H_1|$$

$\therefore H_1$ NUMERABLE.

EN GENERAL $\varphi: \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow H_b$ ES EPIYECTIVA

(24)

$$\circ \frac{|\mathbb{N} \setminus \{0\}|}{|\mathbb{N}|} \geq |H_b| \Rightarrow H_b \text{ finito o numerable.}$$

$$\Rightarrow H = \bigcup_{b \in \mathbb{Q}} H_b \text{ ES NUMERABLE PUES } |H_b| \leq |\mathbb{N}| \text{ y } |H_1| = |\mathbb{N} \setminus \{0\}| = |\mathbb{N}|$$

\hookrightarrow A LO MENOS UNO NUMERABLE.

P20 (Propuesto) Pruebe que el conjunto $H = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ es finito}\}$ ES NUMERABLE (Control 2, 1990)

(Este es mas complicado)

P21 Sean A, B, C, D conjuntos no vacios cualquiera, NO NECESARIAMENTE FINITOS. Supongamos que $|A| = |C|$ y $|B| = |D|$. Definamos $\mathcal{F}(A, B) = \{f \mid f \text{ es fm. de } A \text{ en } B\}$. DEMUESTRE QUE $|\mathcal{F}(A, B)| = |\mathcal{F}(C, D)|$

INDICACIÓN: Si $\psi: A \rightarrow C$ y $\varphi: B \rightarrow D$ son biyecciones, CONSIDERE

$$\Phi: \mathcal{F}(A, B) \rightarrow \mathcal{F}(C, D) \\ f \mapsto \varphi \circ f \circ \psi^{-1}$$

SOLUCIÓN:

Como $|A| = |C|$, existe $\psi: A \rightarrow C$ biyectiva y como $|B| = |D|$, existe $\varphi: B \rightarrow D$ biyectiva. Por estas funciones construimos la función

$$\Phi: \mathcal{F}(A, B) \rightarrow \mathcal{F}(C, D)$$

y DEMOSTREMOS QUE ES biyectiva por lo que $|\mathcal{F}(A, B)| = |\mathcal{F}(C, D)|$. Notemos que $\varphi \circ f \circ \psi^{-1}$ tiene que pertenecer a $\mathcal{F}(C, D)$ pues $\psi^{-1}: C \rightarrow A$, $f: A \rightarrow B$ y $\varphi: B \rightarrow D$.

Problemas ahora que:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} f \text{ INYECTIVA: } \Phi(f_1) = \Phi(f_2) &\Rightarrow \varphi \circ f_1 \circ \psi^{-1} = \varphi \circ f_2 \circ \psi^{-1} \\ &\Rightarrow \varphi^{-1} \circ (\varphi \circ f_1 \circ \psi^{-1}) \circ \psi = \varphi^{-1} \circ (\varphi \circ f_2 \circ \psi^{-1}) \circ \psi \\ &\Rightarrow (\varphi^{-1} \circ \varphi) \circ f_1 \circ (\psi^{-1} \circ \psi) \\ &= (\varphi^{-1} \circ \varphi) \circ f_2 \circ (\psi^{-1} \circ \psi) \end{aligned}$$

$$\circ \text{ id}_B \circ f_1 \circ \text{id}_A = \text{id}_B \circ f_2 \circ \text{id}_A \Rightarrow f_1 = f_2 \text{ (Luego } f \text{ es INYECTIVA)}$$

$$\textcircled{2} f \text{ EPIYECTIVA: } \forall g \in \mathcal{F}(C, D) (\exists f \in \mathcal{F}(A, B)) \Phi(f) = g$$

$$\text{PENSAMOS } \Phi(f) = \varphi \circ f \circ \psi^{-1} = g \mid \varphi^{-1} \circ () \circ \psi \\ \dots f = \varphi^{-1} \circ g \circ \psi$$

Luego $(\forall g \in \mathcal{F}(C, D)) (\exists f = \varphi' \circ g \circ \psi \in \mathcal{F}(A, B))$ (2)

En efecto $\phi(f) = g$
 $\phi(f) = \varphi \circ f \circ \psi^{-1} = \varphi \circ (\varphi' \circ g \circ \psi) \circ \psi^{-1}$
 $= (\varphi \circ \varphi') \circ g \circ (\psi \circ \psi^{-1})$
 $= id_D \circ g \circ id_C = g$ \square

Luego es biyectiva $\Rightarrow |\mathcal{F}(A, B)| = |\mathcal{F}(C, D)|$

P22 Sean C, D conjuntos no vacíos con C finito y D infinito numerable. Sea:

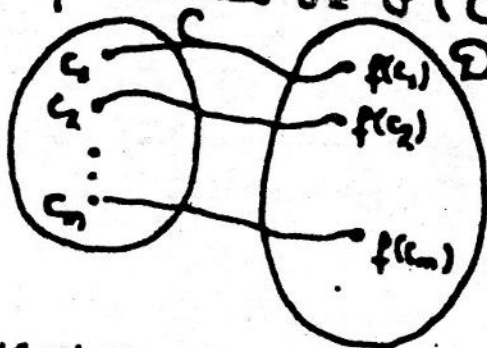
$$\mathcal{F}(C, D) = \{f: C \rightarrow D \mid f \text{ es función}\}$$

Muestre que $\mathcal{F}(C, D)$ es infinito numerable.

Indicación: Puede usar la siguiente propiedad:
 Si A_1, A_2, \dots, A_m son conjuntos numerables, entonces $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m$ es numerable (Control 3, 1995)

Solución:

Como C es finito, sea $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ con $|C| = n$.
 Luego las funciones de $\mathcal{F}(C, D)$ son del tipo:



y notamos que la función f queda totalmente caracterizada por $f(c_1), \dots, f(c_n)$ (un número finito de valores).

Esto nos inspira a considerar la función:

$$\varphi: \mathcal{F}(C, D) \rightarrow D \times D \times \dots \times D = D^m$$

$$f \mapsto (f(c_1), f(c_2), \dots, f(c_n))$$

donde D^m es numerable (ya que D es numerable podemos usar la indicación)

Probamos ahora que φ es biyectiva.

① φ inyectiva:

$$\varphi(f) = \varphi(g) \Rightarrow (f(c_1), \dots, f(c_n)) = (g(c_1), \dots, g(c_n))$$

$$\Rightarrow f(c_i) = g(c_i) \quad i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow f(c) = g(c) \quad \forall c \in C$$

$$\Rightarrow f = g$$

pues son iguales en todo su dominio.

② φ epyectiva:

$$\forall (y_1, \dots, y_m) \in D^m (\exists f \in \mathcal{F}(C, D)) \varphi(f) = (y_1, \dots, y_m)$$

\$4550

PENDEMOS: Queremos que $\varphi(f) = (f(c_1), \dots, f(c_n)) = (y_1, \dots, y_n)$
 Luego queremos que $f(c_i) = y_i$ $i=1, \dots, n$

Esta es la $f \in \mathcal{F}(C, D)$
 que buscamos.

Dado $(y_1, \dots, y_n) \in D^n$, $\exists f \in \mathcal{F}(C, D)$ que asignava los
 de tal manera que $f(c_1) = y_1, f(c_2) = y_2, \dots, f(c_n) = y_n$
 luego tendremos que:

$$\varphi(f) = (f(c_1), \dots, f(c_n)) = (y_1, \dots, y_n)$$

Luego φ es biyectiva y por lo tanto $|\mathcal{F}(C, D)| = |D|^n$
 Pero $|D|^n = |\mathbb{N}|$ (D es numerable). Luego $\mathcal{F}(C, D)$
 es numerable

¡Ojo! La hija de Alejandra de Luna

Esta es la guía que me despidió de este mundo. Ha sido
 difícil para mí pero al final llegué a comprender cuanto
 disfruto hacer clases y creo que "mis alumnos" deben ha-
 ber notado un "pequeño" cambio en la última clase mi-
 llar. Umm... me falta la dedicatoria... siempre tan contenta.
 Esta guía va dedicada a una joven que en mi última clase au-
 xilló antes del control 2 me acercó y me dijo que le ha-
 bía gustado (mi clase)... lo cual me hizo recuperar la alegría
 por hacerlas... ni me acuerdo como era (virtualmente) pero
 con aquel pequeño gesto logró muchas cosas en mí... también
 le dedico esta guía a una niña de Alejandra que siempre me gana-
 ya te habré de comer (las piezas de Alejandra) y te voy a ganar.
 Bueno, me ha costado mucho hacer esta guía (pues tengo prue-
 ba mañana sábado y no he estudiado nada) pero ha valido la pe-
 na... una vez ya terminada me siento muy satisfecho.
 Quiero agradecer en especial a mi sección 05 (No me di cuen-
 ta la gran "producción" de la guía en su portada) que me
 regaló mucho cariño, mucha perseverancia y a pesar de estar
 muy cansados en la tarde igual van a mi clase. Me siento fe-
 liz por haber de alguna manera influenciado sus vidas al
 comienzo de sus carreras universitarias. Quiero también
 dar gracias por los mails escritos a drainequ@yahoo.com
 por gente de varias secciones con preguntas, con materiales de
 estudio o bien (la mayoría) con comentarios o incluso un
 saludo (es increíble cuanto me alegran estos últimos). Varios
 muchachos (Ñoritas) ¡Este es el último esfuerzo, de todo
 lo que tienen y aunque no les valla bien, nunca tendrán de
 que arrepentirse después...

Su Auxiliar y
 Amigo Dr. Drainequero
 Santoro 2002