

①

(a). Suponiendo la existencia de  $\rho(x)$ , demuestre la unicidad.

$$l_j(x) = \frac{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m (x - x_k)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m (x_j - x_k)}$$
$$l_j(x_n) = \delta_{rj} = \begin{cases} 1 & n=j \\ 0 & n \neq j \end{cases}$$

(ii) DEMUESTRE QUE  $p(x) = \sum_{j=1}^m y_j l_j(x) \in K[x]$  ES EL POLINOMIO DE INTERPOLACIÓN PARA LA FAMILIA  $(\{x_j\}_{j=1}^m, \{y_j\}_{j=1}^m)$

(a) Supongamos que  $\exists p_1(x), p_2(x)$  de grado menor igual a  $m-1$  que satisfacen  $p_1(x_j) = p_2(x_j) = y_j \quad \forall j=1, \dots, m$  (es decir que existen 2 polinomios de interpolación)

$$q_r(\mathcal{P}(x)) \leq m-1$$

$$y_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m$$

Luego  $P(x)$  se anula en  $m$  puntos distintos y es de grado menor o igual a  $m-1$ , ¿Imposible?, pues un polinomio de este tipo puede tener a lo más  $m-1$  raíces, nada que sea el polinomio nulo, por lo tanto:  $P(x) = 0$ .

Luego  $p_1(x) = p_2(x)$ . O sea, si existe algún polinomio de intersección, es único.  $\square$

(b) At 15°C,  $\epsilon = 2.1$ .

$$\prod_{i=1}^m c_i = a_1 \cdots a_m$$

conhecida como  $\Pi$  Pitagoria  
Multiplicatoria

MEJOR BASE: probar



$$(i) g_r(l_j(x)) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m g_r(x - x_k) = m-1$$

(2)

Notar que el denominador de  $l_j(x)$  es una constante que no depende de "x".  
 Ahora  $l_j(x_j) = \frac{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m (x_j - x_k)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m (x_j - x_k)} = 1$  Aquí va  $x = x_j$  (Donde lo evaluo)

y

$$l_j(x_r) = \frac{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m (x_r - x_k)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m (x_j - x_k)} = 0 \quad \text{Pues}$$

con  $r \neq j$

$$\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m (x_r - x_k) = 0$$

ya que:

$$\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m (x_r - x_k) = (x_r - x_1) \cdots (x_r - x_r) \cdots (x_r - x_m) = 0$$

→  $k$  puede tomar el valor "r"  
 $k$  solamente no puede tomar el valor  $j$  (Pero  $j \neq r$ , así que no hay problema) ▢

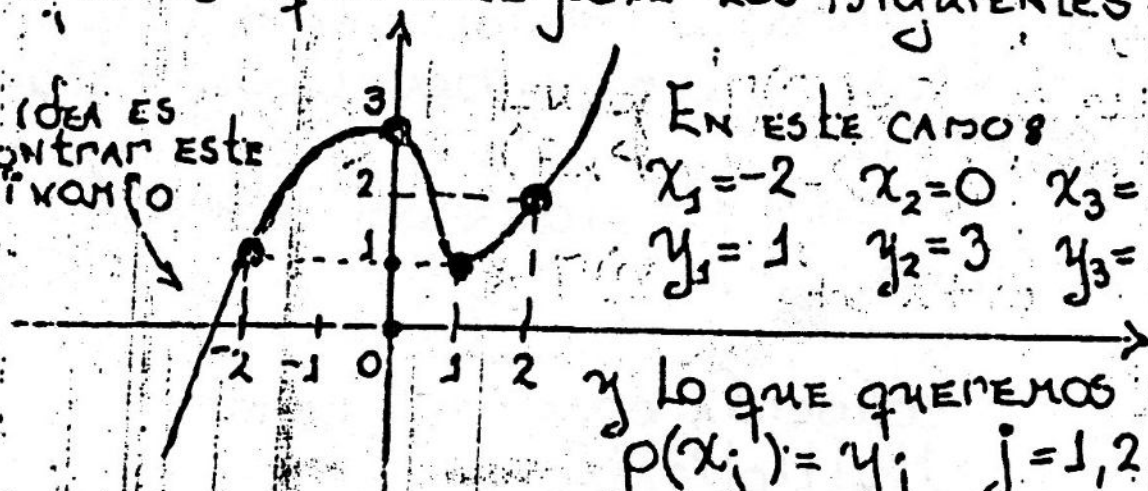
(ii) Probaremos que  $p(x)$  satisface las condiciones del problema y por la unicidad (probad en (a)) concluiremos que es "el polinomio de interpolación."

$$① g_r(p(x)) = g_r\left(\sum_{j=1}^m y_j l_j(x)\right) \leq \max_j g_r(l_j(x)) = m-1.$$

$$② p(x_r) = \sum_{j=1}^m y_j l_j(x_r) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^m y_j l_j(x_r) + y_r \underbrace{l_r(x_r)}_{\substack{1 \\ \text{(Por (i))}}} = y_r$$

Aplicación: Construyamos un polinomio de grado menor o igual que 3 que interpole los siguientes datos:

La idea es encontrar este polinomio



En este caso:

$$x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 2$$

$$y_1 = 1, y_2 = 3, y_3 = 1, y_4 = 2$$

y lo que queremos es  $p(x_j) = y_j \quad j = 1, 2, 3, 4.$

$$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$p^2 - ap + 1$$

$$2p^2 + 2p$$

$$\Rightarrow b =$$



Luego  $l_1(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-2-0)(-2-1)(-2-2)}$  Están todos salvo el  $x_1$  (en  $l_1(x)$ )

(3)

Notar que  $l_1(x_2) = l_1(x_3) = l_1(x_4) = 0$  y que  $l_1(x_1) = 1$ . Es igual al numerador pero con  $x = x_1 = -2$

Análogamente se calculan  $l_2(x)$ ,  $l_3(x)$  y  $l_4(x)$  (¡¡¡¡¡)

Finalmente:

$p(x) = y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + y_3 l_3(x) + y_4 l_4(x)$  No mirar más abajo

$$= 1 \cdot \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-2-0)(-2-1)(-2-2)} + 3 \cdot \frac{(x-(-2))(x-1)(x-2)}{(0-(-2))(0-1)(0-2)} \\ + 1 \cdot \frac{(x-(-2))(x-0)(x-2)}{(1-(-2))(1-0)(1-2)} + 2 \cdot \frac{(x-(-2))(x-0)(x-1)}{(2-(-2))(2-0)(2-1)}$$

y notamos que  $p(x_1) = p(-2) = 1 = y_1$   
 $p(x_2) = p(0) = 3 = y_2$   
 $p(x_3) = p(1) = 1 = y_3$   
 $p(x_4) = p(2) = 2 = y_4$

Finalmente les cuento que esta forma de escribir el polinomio de interpolación se le adjudica a Lagrange (Existe otra forma de escribirlo que llega al mismo polinomio)

La fórmula de Newton (Todo esto lo volverán a ver en un ramo llamado "Cálculo Numérico")

P2] a) Sea  $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  un polinomio con coeficientes en  $\mathbb{R}$ . Sea  $r(x)$  el resto de la división de  $p(x)$  por  $(x-1)$ . Por  $r(4) = 0$  y  $x=1$  es raíz de  $p(x)$ . Calcule  $a, b, c$ .

b) Sea  $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{m-1} x^{m-1} + x^m$  con  $a_0, \dots, a_{m-1} \in \mathbb{C}$  tal que  $p(x)$  tiene  $m$  raíces distintas en  $\mathbb{C}$  y si  $z \in \mathbb{C}$  es raíz de  $p(x)$ , entonces su conjugado  $\bar{z}$  también lo es. Demuestre que  $a_0, a_1, \dots, a_{m-1} \in \mathbb{R}$ .  
 Hint: Estude el producto  $(x-z)(x-\bar{z})$  donde  $z \in \mathbb{C}$

Solución:

El Teorema de la división de polinomios nos dice que si a  $p(x)$  lo dividimos por  $(x-1)$  tendremos que:  
 $p(x) = (x-1)q(x) + r(x)$  con  $\deg(r(x)) < \deg(x-1) = 1$ .

Por lo tanto  $r(x)$  tiene grado 0 o  $-\infty$  (En ambos casos  $r(x) = c \leftarrow$  constante)

Pero  $r(4) = 0 \Rightarrow r(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$

Podría haber sido  $r$  evaluado en cualquier punto (que sea  $r(4)$  no es relevante)

Podría haber sido  $r(69) = 0 \dots$   
 Si  $h > 0$ ,  $\{h \in \mathbb{N} \mid h > 0\} \neq \emptyset$   
 Si  $h < 0 \Rightarrow -h > 0 \Rightarrow -h \in \mathbb{N}$



Luego  $p(x) = (x-1)q(x)$ , o sea  $x=1$  es raíz de  $p(x)$ . ④  
 Como los coeficientes de  $p(x)$  son reales, si  $x=i$  es raíz de  $p(x)$ ,  $x=-i$  también es raíz (su conjugado).  
 Como  $p(x)$  es de grado "3" y es mónico (coeficiente de  $x^3$  igual a 1), entonces:

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-1)(x-i)(x-(-i)) \\ &= (x-1)(x-i)(x+i) \\ &= (x-1)(x^2+1) = x^3 + x - x^2 - 1 \\ &= x^3 - x^2 + x - 1 \\ &= x^3 + ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

igualando coeficientes

$$\Rightarrow a = -1, b = 1 \text{ y } c = -1. \quad \blacksquare$$

b) Notemos que si  $z = a+bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ )

$$\begin{aligned} \Rightarrow (x-z)(x-\bar{z}) &= x^2 - x(z+\bar{z}) + z\bar{z} \\ &= x^2 - x(2a) + a^2 + b^2 \\ &= x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) \end{aligned}$$

$$\bar{z} = a-bi$$

$$a+bi \text{ con } b \neq 0$$

ES UN POLINOMIO CON COEFICIENTES EN  $\mathbb{R}$ .  
 Notemos además que las raíces "complejas" vienen de a pares ( $z$  y  $\bar{z}$ ), o sea existe un número par de raíces "complejas".

Luego:

$$p(x) = \underbrace{(x-z_1)(x-\bar{z}_1)}_{\text{PARCEJA}} \cdots \underbrace{(x-z_r)(x-\bar{z}_r)}_{\text{PARCEJA}} \underbrace{(x-x_1) \cdots (x-x_s)}_{\text{RAICES REALES}}$$

ES MÓNICO RAÍCES COMPLEJAS RAICES REALES

PERO EL POLINOMIO  $(x-x_1) \cdots (x-x_s)$  TIENE TODOS SUS COEFICIENTES EN  $\mathbb{R}$  y  $\underbrace{[(x-z_1)(x-\bar{z}_1)]}_{\text{COEFICIENTES EN } \mathbb{R}} \cdots \underbrace{[(x-z_r)(x-\bar{z}_r)]}_{\text{COEFICIENTES EN } \mathbb{R}}$  TAMBIÉN.

Luego  $p(x)$  tiene todos sus coeficientes en  $\mathbb{R}$ .  $\blacksquare$

ACLARACIONES: ①  $x_1, x_2, \dots, x_s \in \mathbb{R}$

②  $p(x)$  podría tener solo raíces en  $\mathbb{R}$ , con lo cual el resultado sería claro ( $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ )

③ He hablado de "complejas" (entre comillas) refiriéndome a "compleja pero no real".

En estricto "rigor" debería escribir que

$$z_1, \bar{z}_1, \dots, z_r, \bar{z}_r \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

P3) Sea  $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ ,  $\deg(p(x)) \geq 4$  y  $e, f, g \in \mathbb{R}$  donde  $f \neq 0$ .

Se pide que:

(i) El resto de dividir  $p(x)$  por  $(x^2 - f^2)$  es  $gx$

(ii) El resto  $r(x)$  de dividir  $p(x)$  por  $(x^2 - f^2)(x - e)$  ES UN POLINOMIO MÓNICO.



- a) DETERMINE LOS VALORES DE  $\rho(f)$  Y  $\rho(-f)$   
 b) JUSTIFIQUE QUE  $\text{gr}(\pi(x)) \leq 2$   
 c) DETERMINE LOS POSIBLES RESTOS  $\pi(x)$ .

**Resolución:**

a) Por la propiedad (i) tenemos que:

$$\rho(x) = (x^2 - f^2)q(x) + gx$$

donde debe cumplirse que  $\text{gr}(gx) < \text{gr}(x^2 - f^2)$

Luego  $\rho(f) = \cancel{(f^2 - f^2)}q(x) + gf = gf$  cumple.  
 $\rho(-f) = \cancel{(-f^2 - f^2)}q(x) - gf = -gf$  ■

b) Por la propiedad (ii) tenemos que:

$$\rho(x) = (x^2 - f^2)(x - e)\pi(x) + \pi(x)$$

con  $\text{gr}(\pi(x)) < \text{gr}((x^2 - f^2)(x - e))$

∴  $\text{gr}(\pi(x)) \leq 2$  ■

Noten que  $\rho(f) = \pi(f) = gf$   
 y  $\rho(-f) = \pi(-f) = -gf$

c) Como  $\text{gr}(\pi(x)) \leq 2$  y  $\pi(x)$  es mónico (Por la propiedad (ii)) tenemos 3 opciones:

- ①  $\pi(x) = 1$
  - ②  $\pi(x) = x + m$
  - ③  $\pi(x) = x^2 + ax + b$
- $\pi(x)$  "mónico"

ANALICEMOS ESTAS 3 POSIBILIDADES:

\*  $\pi(x) = 1$  NO PUEDE SER PUES  $\pi(f) = 1 = gf$   
 y  $\pi(-f) = 1 = -gf$   
 o sea  $gf = 1 = -1 \Rightarrow \text{imposible}$

\*  $\pi(x) = x + m$

$$\begin{aligned} \pi(f) &= f + m = gf \\ + \pi(-f) &= -f + m = -gf \\ \hline 2m &= 0 \Rightarrow m = 0 \end{aligned}$$

∴  $\pi(x) = x$

PERO ENTONCES  $\pi(f) = f = gf \Rightarrow g = 1 \ (f \neq 0)$   
 $\pi(-f) = -f = -gf \Rightarrow g = 1 \ (f \neq 0)$

LUEGO  $\pi(x) = x$  ES UN RESTO POSIBLE CUANDO  $g = 1$ .  
 (EN CASO CONTRARIO, NO NOS SIRVE)

\*  $\pi(x) = x^2 + ax + b$

$$\begin{aligned} \pi(f) &= f^2 + af + b = gf \\ + \pi(-f) &= f^2 - af + b = -gf \\ \hline 2f^2 + 2b &= 0 \\ \Rightarrow b &= -f^2 \end{aligned}$$



Como  $x^2 + ax + b = gf \Rightarrow a = g \ (f \neq 0)$

Luego  $r(x) = x^2 + gx - f^2$  (y satisface  $r(f) = gf$   
y  $r(-f) = -gf$ .)

Este resto ni es posible!  $\square$

Pr 4 Sea  $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$ . Considera  $\omega_k = e^{i(\frac{2\pi k}{m})}, k=0,1,\dots,m-1$ .

(a) Pruebe que:

(a.1)  $(\omega_k)^j = (\omega_j)^k$  (a.2)  $\omega_k^{-j} = \overline{(\omega_k)^j}$   $k, j \in \{0,1,\dots,m-1\}$

(b) Pruebe que:

$$\sum_{k=0}^{m-1} \omega_k^j \omega_k^{-h} = \begin{cases} m & \text{si } j=h \\ 0 & \text{si } j \neq h \end{cases} \quad j, h \in \{0,1,\dots,m-1\}$$

(c) Pruebe que:

$$\sum_{k=0}^{m-1} \omega_k = 0$$

Reducción:

(a) (a.1)  $(\omega_k)^j = (e^{i(\frac{2\pi k}{m})})^j \stackrel{\text{Moivre}}{=} e^{i(\frac{2\pi kj}{m})} \stackrel{\text{Moivre}}{=} (e^{i(\frac{2\pi j}{m})})^k = (\omega_j)^k$

(a.2)  $\omega_k^{-j} = (e^{i(\frac{2\pi k}{m})})^{-j} \stackrel{\text{Moivre}}{=} e^{-i(\frac{2\pi kj}{m})} = \overline{e^{i(\frac{2\pi kj}{m})}} = \overline{(\omega_k)^j} = (\omega_k^{-j})$

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \cos(x) \\ \text{y } \sin(-x) &= -\sin(x) \\ &= \cos\left(-\frac{2\pi kj}{m}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi kj}{m}\right) \\ &= \cos\left(\frac{2\pi kj}{m}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi kj}{m}\right) \\ &= \overline{\cos\left(\frac{2\pi kj}{m}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi kj}{m}\right)} \\ &= \overline{e^{i(\frac{2\pi kj}{m})}} \\ &\stackrel{\text{Moivre}}{=} \overline{(e^{i(\frac{2\pi k}{m})})^j} = \overline{(\omega_k)^j} = (\omega_k^{-j}) \end{aligned}$$

(b)  $\sum_{k=0}^{m-1} \omega_k^j \omega_k^{-h} = \sum_{k=0}^{m-1} \omega_k^h \omega_k^{-h} = m$

si  $j \neq h$   
 $\sum_{k=0}^{m-1} \omega_k^j \omega_k^{-h} = \sum_{k=0}^{m-1} \omega_k^{j-h} = \sum_{k=0}^{m-1} (\omega_{j-h})^k = \frac{1 - (\omega_{j-h})^m}{1 - \omega_{j-h}}$

Noten que si  $j \neq h \Rightarrow \omega_{j-h} \neq 1$ . (Noten que  $j-h \in \{1,\dots,m-1\}$  y que  $\omega_k = 1$  ( $k \in \{0,\dots,m-1\}$ )  $\Rightarrow k=0$ .)

(a.1)  $\sum_{k=0}^{m-1} (\omega_{j-h})^k = \sum_{k=0}^{m-1} (\omega_m)^{j-h} = (1)^{j-h} = 1$



pues  $\omega_m = e^{i(2\pi/m)} = e^{i(2\pi)} = 1$ .  $\square$

(c)  $\sum_{k=0}^{m-1} \omega_k = \sum_{k=0}^{m-1} (\omega_1)^k = \frac{1-(\omega_1)^m}{1-\omega_1} = \frac{1-(\omega_m)}{1-\omega_1} = 0$   $\square$

$\uparrow$   $\omega_1 \neq 1$   $\uparrow$  (a.1)  
 PUES  $\omega_k = (\omega_k)^1 = (\omega_1)^k$  (a.1)

- P5 (a) Define el conjunto  $S_1 = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$
- (i) Probar que  $(S_1, \cdot)$  es un subgrupo de  $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$   
 (Donde  $\cdot$  es la multiplicación de números complejos)
- (ii) Sea  $\omega \in \mathbb{C}$  una raíz cúbica de la unidad. Probar que la función  $f: \mathbb{Z}_3 \rightarrow S_1$  definida en cada  $a \in \mathbb{Z}_3$  como  $f(a) = \omega^a$  es un homomorfismo de  $(\mathbb{Z}_3, +_3)$  en  $(S_1, \cdot)$ . Recuerde que  $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$  y  $+_3$  es la suma módulo 3 en  $\mathbb{Z}_3$ .
- (iii) Pruebe que si  $g: (\mathbb{Z}_3, +_3) \rightarrow (S_1, \cdot)$  es un homomorfismo, entonces existe una raíz cúbica de la unidad  $\omega \in \mathbb{C}$  tal que  $g(a) = \omega^a$  en todo  $a \in \mathbb{Z}_3$ .
- (b) Pruebe que el producto de las raíces  $m$ -ésimas de la unidad es igual a  $(-1)^{m-1}$

Solución:

(a) (i) ①  $S_1 \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$  (Pues  $0 \notin S_1$ )

②  $S_1 \neq \emptyset$  (Pues  $1 \in S_1$ )

③ Sean  $z_1, z_2 \in S_1$  ( $|z_1| = |z_2| = 1$ )

Pd q  $z_1 \cdot z_2^{-1} \in S_1$

En efecto  $|z_1 \cdot z_2^{-1}| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{1}{1} = 1$  (o sea  $z_1 \cdot z_2^{-1} \in S_1$ )  $\square$

(ii) Notemos que  $f$  está bien definida (vamos a probarlo).  
 Para ello veamos que  $|\omega| = 1$  pues  $\omega$  es una raíz cúbica de la unidad (si fuera raíz  $m$ -ésima de la unidad, su módulo también sería 1). Luego veamos que  $f(a) = \omega^a$  efectivamente va a parar a  $S_1$  (o sea que  $\omega^a \in S_1$ ).  
 En efecto  $|\omega^a| = |\omega|^a = 1^a = 1$   
 $a \in \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$

Ahora veamos que es un homomorfismo. Efectivamente:

$$f(a +_3 b) = \omega^{a+3k} = \omega^{a+b+3k} = \omega^a \omega^b \omega^{3k} = \omega^a \omega^b (\omega^3)^k = \omega^a \omega^b = f(a) \cdot f(b)$$

$\omega$  ES RAÍZ CÚBICA DE LA UNIDAD.  
 $\omega^3 = 1$

(a +<sub>3</sub> b) - (a + b) = 3k (se diferencia en un múltiplo de 3)



Luego  $f$  es un homomorfismo de  $(\mathbb{Z}_3, +_3)$  en  $(S_1, \cdot)$  (

(iii) Debemos encontrar  $\omega$  tal que  $g(a) = \omega^a$  tal que  $\omega^3 = 1$ . Pero si existiera  $\omega$  entonces  $g(1) = \omega^1 = \omega$ , lo cual nos indica que  $\omega$  debería ser  $g(1)$  (Recuerden que aquí  $g$  es dado). Veamos:

$$g(2) = g(1 +_3 1) = g(1) \cdot g(1) = (g(1))^2$$

$$g(0) = g(1 +_3 1 +_3 1) = g(1) \cdot g(1) \cdot g(1) = (g(1))^3$$

Pero:

$$g(0) = 1$$

Neutro en  $(\mathbb{Z}_3, +_3)$

Neutro en  $(S_1, \cdot)$

pues  $g: (\mathbb{Z}_3, +_3) \rightarrow (S_1, \cdot)$  es un homomorfismo y  $(S_1, \cdot)$  es un grupo (Por (i))

Luego  $g(0) = (g(1))^3 = 1$ . Por lo tanto  $g(1)$  debe ser una raíz cúbica de la unidad. Así  $\omega = g(1)$

y

$$g(0) = 1 = \omega^0$$

$$g(1) = \omega = \omega^1$$

$$g(2) = (g(1))^2 = \omega^2$$

o sea  $g(a) = \omega^a$

$$\forall a \in \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$$

(b) Las raíces  $m$ -ésimas de la unidad son:

$$\omega_k = e^{i \frac{2\pi k}{m}}$$

$$k = 0, \dots, m-1$$

y por ende

$$\omega_0 \omega_1 \dots \omega_{m-1} = e^{i \frac{2\pi}{m} (0+1+\dots+(m-1))}$$

$$= e^{i \frac{2\pi}{m} \left( \frac{(m-1)m}{2} \right)} = \left( e^{i\pi} \right)^{m-1} = (-1)^{m-1}$$

-1  $\nwarrow$  Verificarlo!

P6 (a) Si  $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \alpha$ , pruebe que  $z^m + \frac{1}{z^m} = 2 \cos(m\alpha)$  (

(b) (i) Pruebe que  $z^m + (\bar{z})^m \in \mathbb{R}$  ( $z \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{N}$ )

(ii) Pruebe que  $\frac{1}{1+z^m} + \frac{1}{1+(\bar{z})^m} \in \mathbb{R}$  ( $z \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{N}$ )

(iii) Pruebe que  $(\forall m \in \mathbb{N}) (\forall \rho \in \mathbb{R}) (1 + \rho e^{i\frac{\pi}{2}})^m + (1 - \rho e^{i\frac{\pi}{2}})^m \in \mathbb{R}$ .

(c) Sean  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  tal que  $|z_1| = |z_2| = 1$ . Pruebe que:  $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow z_1 = z_2$

Solución:

$$(a) z + \frac{1}{z} = 2 \cos \alpha \Leftrightarrow z^2 - 2z \cos \alpha + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 2z \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow (z - \cos \alpha)^2 + \operatorname{sen}^2 \alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow (z - \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)(z - \cos \alpha - i \operatorname{sen} \alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = \cos \alpha - i \operatorname{sen} \alpha \quad \text{ó} \quad z = \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha$$



Lo anterior lo podría haber hecho resolviendo la ecuación (1) de 2º grado pero lo hice de otra forma (que puede inspirar en algún tiempo más "trucos para integrales")

Digamos:

$$z = \cos \alpha - i \sin \alpha = e^{-i\alpha} \quad (\text{para probarlo!})$$

$$\text{ó } z = \cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha}$$

$$\text{Por } z = e^{i\alpha} \Rightarrow z^m + \frac{1}{z^m} = e^{i\alpha m} + \frac{1}{e^{i\alpha m}} = e^{i\alpha m} + e^{-i\alpha m} \\ = \cos(\alpha m) + i \sin(\alpha m) + \cos(\alpha m) - i \sin(\alpha m) \\ = 2 \cos(m\alpha)$$

Moivre

El caso  $z = e^{-i\alpha}$  es análogo.  $\square$

(b) (i) Para probar que  $z \in \mathbb{C}$  está en  $\mathbb{R}$  hay que probar que  $\bar{z} = z$  (condición necesaria y suficiente)

Notemos que:

$$\bar{z}^m = \underbrace{\bar{z} \cdot \bar{z} \cdots \bar{z}}_{m \text{ veces}} = \bar{z} \cdot \bar{z} \cdots \bar{z} = (\bar{z})^m \quad (*)$$

$$\text{Ahora } \overline{z^m + (\bar{z})^m} = \bar{z}^m + \overline{(\bar{z})^m} \underset{\text{Por } (*)}{=} (\bar{z})^m + (\bar{z})^m = (\bar{z})^m + (z)^m$$

Luego  $z^m + (\bar{z})^m \in \mathbb{R}$

Por ejemplo si  $z = 1+i \Rightarrow \bar{z} = 1-i$  y  $(1+i)^m + (1-i)^m \in \mathbb{R} \quad \forall m \in \mathbb{N}$ .  $\square$

$$(ii) \frac{1}{1+z^m} + \frac{1}{1+(\bar{z})^m} = \frac{\bar{1}}{1+z^m} + \frac{\bar{1}}{1+(\bar{z})^m} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Pues } \bar{1} = 1 \\ \text{y } \bar{z^m} = (\bar{z})^m \end{array} \right\} \\ = \frac{1}{1+z^m} + \frac{1}{1+(\bar{z})^m} \\ = \frac{1}{1+(\bar{z})^m} + \frac{1}{1+(z)^m}$$

$$\text{Luego } \frac{1}{1+z^m} + \frac{1}{1+(\bar{z})^m} \in \mathbb{R}. \quad \square$$

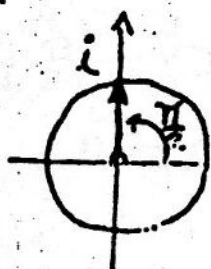
(iii) Notemos que  $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

Por lo tanto:

$$(1 + pe^{i\frac{\pi}{2}})^m + (1 - pe^{i\frac{\pi}{2}})^m = (1 + pi)^m + (1 - pi)^m \quad (\text{con } p \in \mathbb{R})$$

y este problema se resuelve entonces un caso particular de (i) con  $z = 1+pi$ .  $\square$

c) Sean  $z_1 = a+bi$  y  $z_2 = c+di$ : (i) El resto de dividir  $p(x)$  por  $(x-z_1)(x-z_2)$  es un polinomio de grado menor que 2.





Pd q  $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow z_1 = z_2$

$(\Rightarrow)$  Sabemos que  $|z_1| = 1 = \sqrt{a^2 + b^2}$   
y que  $|z_2| = 1 = \sqrt{c^2 + d^2}$

$|z_1| + |z_2|$

Además  $|z_1 + z_2| = |(a+c) + (b+d)i| = \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} = 2$   
Luego  $\underbrace{a^2 + b^2}_1 + \underbrace{c^2 + d^2}_1 + 2ac + 2bd = 4$

$\Rightarrow 2ac + 2bd = 2$

Luego  $(a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) - (2ac + 2bd) = 1 + 1 - 2 = 0$   
 $= (a-c)^2 + (b-d)^2 = 0$

$\Rightarrow a-c=0$  y  $b-d=0$

$\Rightarrow a=c$  y  $b=d$  o sea  $z_1 = z_2$

$(\Leftarrow)$  Como  $z_1 = z_2 \Rightarrow |z_1 + z_2| = |2z_1| = 2|z_1| = 2$

$\xrightarrow{\text{pues}} = |z_1| + |z_2|$   
 $|z_1| = |z_2| = 1$

P4 Pruebe que si:

$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 0$

y  $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 0$

$\} (*)$

Entonces

$\cos(3\alpha) + \cos(3\beta) + \cos(3\gamma) = 3\cos(\alpha + \beta + \gamma)$

y  $\sin(3\alpha) + \sin(3\beta) + \sin(3\gamma) = 3\sin(\alpha + \beta + \gamma)$

Solución:

Usando la conocida "factorización" (Por Decisión 05)

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$

concluimos que si:

$a+b+c=0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$  (Este resultado

$(**)$  también puede hacerse con álgebra, pero la factorización de arriba nos permite obtenerlo fácilmente)

Luego, como sabemos:  $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$

$e^{i\beta} = \cos \beta + i \sin \beta$

$e^{i\gamma} = \cos \gamma + i \sin \gamma$

$\therefore e^{i\alpha} + e^{i\beta} + e^{i\gamma} = 0$  (Por  $(*)$ )

$\Rightarrow (e^{i\alpha})^3 + (e^{i\beta})^3 + (e^{i\gamma})^3 = 3e^{i\alpha} e^{i\beta} e^{i\gamma}$

Por  $(**)$

$\Rightarrow e^{i(3\alpha)} + e^{i(3\beta)} + e^{i(3\gamma)} = 3e^{i(\alpha + \beta + \gamma)}$

Mostramos

$\Rightarrow \cos(3\alpha) + i \sin(3\alpha) + \cos(3\beta) + i \sin(3\beta) + \cos(3\gamma) + i \sin(3\gamma) = (1 + i \cos(\alpha + \beta + \gamma) + i \sin(\alpha + \beta + \gamma))$

$= 3\cos(\alpha + \beta + \gamma) + 3i \sin(\alpha + \beta + \gamma)$

Iguando parte real y parte imaginaria se concluye



P8/ Sean  $J_2 = \{p(x) \in \mathcal{P}(x) / \deg(p) \leq 2, a_0 = 0, a_1 \neq 0\}$ . En  $J_2$  ①

SE DEFINE LA l.c.i.  $\Delta$  A TRAVÉS DE:

$$p(x) \Delta q(x) = \sum_{i=1}^2 c_i x^i \text{ EN QUE } p(q(x)) = \sum_{i=1}^m c_i x^i$$

- (a) Probar que  $(J_2, \Delta)$  ES UN GRUPO NO ABELIANO  
 (b) Sean  $f: J_2 \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  TAL QUE  $f(a_1 x + a_2 x^2) = a_1$  ES UN ISOMORFISMO DE  $(J_2, \Delta)$  EN  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$   
 (c) Sean  $H = \{p(x) \in J_2 / a_1 = 1\}$ . Probar que  $(H, \Delta)$  ES SUBGRUPO ABELIANO DE  $(J_2, \Delta)$

SOLUCIÓN:

(a) Notamos que los polinomios de  $J_2$  SON DE LA FORMA  $p(x) = a_1 x + a_2 x^2$  (Polinomios de grado menor o igual que 2 SIN TÉRMINO CONSTANTE.)

$$\text{Sean } p(x), q(x) \in J_2 \Rightarrow p(x) = a_1 x + a_2 x^2 \\ q(x) = b_1 x + b_2 x^2$$

$$\text{Entonces } p(q(x)) = p(b_1 x + b_2 x^2) \\ = a_1 (b_1 x + b_2 x^2) + a_2 (b_1 x + b_2 x^2)^2 \\ = a_1 b_1 x + a_1 b_2 x^2 + a_2 b_1^2 x^2 + 2a_2 b_1 b_2 x^3 + a_2 b_2^2 x^4 \\ \underbrace{(a_1 b_2 + a_2 b_1^2)}_{c_2} x^2$$

$$\text{Luego } c_1 = a_1 b_1 \text{ y } c_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1^2$$

y  $p(x) \Delta q(x) = a_1 b_1 x + (a_1 b_2 + a_2 b_1^2) x^2 = *$   
 Ahora probemos que  $(J_2, \Delta)$  ES UN GRUPO NO ABELIANO.

①  $\Delta$  ES l.c.i. EN  $J_2$

Si  $p(x), q(x) \in J_2$  ( $p(x) = a_1 x + a_2 x^2, q(x) = b_1 x + b_2 x^2$ )  
 $\Rightarrow p(x) \Delta q(x) = * \in J_2$  PUES  $\deg(p(x) \Delta q(x)) \leq 2$   
 y EL COEFICIENTE QUE ACOMPAÑA A  $x$  (O SEA  $a_1 b_1$ ) ES DISTINTO DE 0  
 PUES  $a_1 \neq 0$  ( $p(x) \in J_2$ ) y  $b_1 \neq 0$  ( $q(x) \in J_2$ ).

②  $\Delta$  ES ASOCIATIVA: Sean  $p(x) = a_1 x + a_2 x^2, q(x) = b_1 x + b_2 x^2$   
 y  $r(x) = c_1 x + c_2 x^2$

$$(p(x) \Delta q(x)) \Delta r(x) = (a_1 b_1 x + (a_1 b_2 + a_2 b_1^2) x^2) \Delta (c_1 x + c_2 x^2) \\ \xrightarrow{\text{ver (*)}} = a_1 b_1 c_1 x + (a_1 b_1 c_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1^2) c_1^2) x^2 \\ = a_1 b_1 c_1 x + (a_1 b_1 c_2 + a_1 b_2 c_1^2 + a_2 b_1^2 c_1^2) x^2$$

$$p(x) \Delta (q(x) \Delta r(x)) = (a_1 x + a_2 x^2) \Delta (b_1 c_1 x + (b_1 c_2 + b_2 c_1^2) x^2)$$

$$\xrightarrow{\text{ver (*)}} = a_1 b_1 c_1 x + (a_1 (b_1 c_2 + b_2 c_1^2) + a_2 (b_1 c_1)^2) x^2 \\ = a_1 b_1 c_1 x + (a_1 b_1 c_2 + a_1 b_2 c_1^2 + a_2 b_1^2 c_1^2) x^2$$

$$\text{Luego } (p(x) \Delta q(x)) \Delta r(x) = p(x) \Delta (q(x) \Delta r(x))$$



③ Existe neutro  $e(x) \in J_2$

Buscamos  $e(x) = e_1x + e_2x^2$  con  $e_1 \neq 0$ .

Dea  $p(x) = a_1x + a_2x^2$ . Entonces:

$$p(x) \Delta e(x) = e(x) \Delta p(x) = p(x)$$

$$\text{Luego } a_1e_1x + (a_1e_2 + a_2e_1^2)x^2 = e_1a_1 + (e_1a_2 + e_2a_1^2)x^2 = a_1x + a_2x^2$$

$$\Leftrightarrow a_1e_1 = e_1a_1 = a_1 \quad (1)$$

$$\text{y } a_1e_2 + a_2e_1^2 = e_1a_2 + e_2a_1^2 = a_2 \quad (2)$$

De (1),  $e_1 = 1$  (Pues  $a_1 \neq 0 \leftarrow p(x) \in J_2$ )

Reemplazando en (2) tenemos:

$$a_1e_2 + a_2 = a_2 + e_2a_1^2 = a_2 \leftarrow \text{se satisface con } e_2 = 0.$$

De aquí se obtiene que  $e_2 = 0$

$$\text{Luego } e(x) = 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 = x \in J_2 \quad (\text{Pues } e_1 = 1 \neq 0)$$

④ Dado  $p(x) = a_1x + a_2x^2$  debemos encontrar  $q(x) = b_1x + b_2x^2$  con  $b_1 \neq 0$  tal que  $p(x) \Delta q(x) = q(x) \Delta p(x) = e(x) = x$ .

$$\text{Luego } \begin{cases} p(x) \Delta q(x) = a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1^2)x^2 = x \\ q(x) \Delta p(x) = b_1a_1 + (b_1a_2 + b_2a_1^2)x^2 = x \end{cases} \quad (**)$$

Luego:

$$a_1b_1 = 1, \quad a_1b_2 + a_2b_1^2 = 0 \quad \text{y} \quad b_1a_2 + b_2a_1^2 = 0$$

$$\Rightarrow b_1 = \frac{1}{a_1} \Rightarrow a_1b_2 + a_2\left(\frac{1}{a_1}\right)^2 = 0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{a_1}a_2 + b_2a_1 = 0$$

$b_1 \neq 0$   
( $b_1$  existe pues  $a_1 \neq 0$ )

$b_2 = -\frac{a_2}{a_1^3}$  (De ambas se concluye lo mismo, o sea el sistema es consistente)

$$\text{Luego } q(x) = \frac{1}{a_1}x - \frac{a_2}{a_1^3}x^2 \quad \text{polinomio inverso de } p(x) \text{ para } \Delta. \quad (p(x))^{-1}$$

⑤ Es no abeliano pues:

$$p(x) \Delta q(x) - q(x) \Delta p(x) = (a_1b_2(1-a_1) + a_2b_1(b_1-1))x^2$$

que no necesariamente vale 0.

En particular si  $a_1 = 0, a_2 = 1, b_1 = 2, b_2 = 0$  no vale 0, o sea  $(x^2) \Delta (2x) \neq (2x) \Delta (x^2)$

(b) Veamos que  $f$  es un homomorfismo

$$\text{Dea } p(x) = a_1x + a_2x^2$$

$$q(x) = b_1x + b_2x^2$$

$$\text{Luego } f(p(x) \Delta q(x)) = f(a_1b_1x + (a_1b_2 + a_2b_1^2)x^2)$$

$$= a_1b_1$$

$$= f(p(x)) \cdot f(q(x))$$

$$(z+1)^n = z^n$$



Solo basta probar que  $f$  es epimorfismo. ( $f: J_2 \rightarrow R \setminus \{0\}$ ) (3)

Pdg:

$$(\forall \eta \in R \setminus \{0\}) (\exists p(x) \in J_2) f(p(x)) = \eta$$

En efecto, tomando  $p(x) = \eta x \in J_2$

tenemos

$$f(p(x)) = \eta \quad \square$$

(Pues  $\eta \neq 0$ )

COEFICIENTE QUE  
ACOMPaña A  $x$ .

(c) (1)  $H \subseteq J_2$  ✓

(2)  $H \neq \emptyset$  (Pues  $p(x) = 1 \cdot x = x \in H$ )

(3) Sean  $h_1(x) = x + ax^2$  ( $\cup$  sea  $h_1(x), h_2(x) \in H$ )  
 $h_2(x) = x + bx^2$

Pdg  $h_1(x) \Delta (h_2(x))^{-1} \in H$

En efecto  $h_1(x) \Delta (h_2(x))^{-1} = (x + ax^2) \Delta (x - bx^2)$   
 $= x + (-b + a)x^2 \in H$

COEF. DE  $x$  ES IGUAL A 1.

Ver (\*\*\*)

$\cup$  sea  $h_1(x), h_2(x) \in H \Rightarrow h_1(x) \Delta (h_2(x))^{-1} \in H$

Luego  $(H, \Delta)$  es subgrupo de  $(J_2, \Delta)$ .

Veamos que  $H$  es abeliano. En la parte (a) obtuvimos que si  
 $p(x) = a_1x + a_2x^2$  y  $q(x) = b_1x + b_2x^2$ , entonces:

$$p(x) \Delta q(x) - q(x) \Delta p(x) = (a_1b_2(1-a_1) + a_2b_1(b_1-1))x^2$$

pero aquí  $a_1 = b_1 = 1$  (Pues  $p(x), q(x) \in H$ )

Luego  $p(x) \Delta q(x) = q(x) \Delta p(x)$

✓ PUES ESTA EXPRESIÓN  
VALE 0.

P9) Considera los números reales  $S = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \cos(k\alpha)$

y  $S' = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \operatorname{sen}(k\alpha)$

donde  $\alpha \in \mathbb{R}$

(i) Probar que

$$S + iS' = (1 + \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^m$$

(ii) Deduzca que

$$S = \left(2 \cos \left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^m \cos \left(\frac{m\alpha}{2}\right)$$

$$y \quad S' = \left(2 \cos \left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^m \operatorname{sen} \left(\frac{m\alpha}{2}\right)$$

Solución:

(i)  $S + iS' = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (\cos(k\alpha) + i \operatorname{sen}(k\alpha)) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} e^{i(k\alpha)} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (e^{i\alpha})^k$

$$= (1 + e^{i\alpha})^m = (1 + \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^m \quad \square$$

↑  $\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^k = (1+x)^m$

$\Leftrightarrow Z = \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha$

$Z = \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha$

Moivre



$$(ii) \text{ Como } \cos(\alpha) = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \text{DEN}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow 1 + \cos \alpha = 2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad ($$

$$= 2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1.$$

$$\text{y } \text{DEN}(\alpha) = 2 \text{DEN}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$(1 + \cos \alpha + i \text{DEN} \alpha)^m = (2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i \cdot 2 \text{DEN}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right))^m$$

$$= (2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) [\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i \text{DEN}\left(\frac{\alpha}{2}\right)])^m$$

$$= (2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right))^m [\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i \text{DEN}\left(\frac{\alpha}{2}\right)]^m$$

$$\cos\left(\frac{m\alpha}{2}\right) + i \text{DEN}\left(\frac{m\alpha}{2}\right)$$

$$= (2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right))^m \cos\left(\frac{m\alpha}{2}\right) + i (2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right))^m \text{DEN}\left(\frac{m\alpha}{2}\right) = S + i S' \quad \uparrow \text{Parte}(i)$$

Iguando parte real y parte imaginaria se obtiene lo pedido.  $\square$

Notar que si tomamos en particular  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  tenemos

$$\text{que es: } (\sqrt{2})^m \cos\left(\frac{m\pi}{4}\right) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \binom{m}{0} - \binom{m}{2} + \binom{m}{4} - \binom{m}{6} + \dots$$

$$\text{y } (\sqrt{2})^m \text{DEN}\left(\frac{m\pi}{4}\right) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \text{DEN}\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \binom{m}{1} - \binom{m}{3} + \binom{m}{5} - \binom{m}{7} + \dots$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

P10 i) De sabe que  $1+i$  es una raíz de  $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 - 4x + 1$ . DETERMINE SUS OTRAS RAÍCES.

ii) Sea  $p(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m$ . Sean  $x_i$   $i=1, \dots, m$  las raíces del polinomio  $p(x)$ . DETERMINE LAS RAÍCES DEL POLINOMIO  $q(x) = a_0 \mu^m x^m + a_1 \mu^{m-1} x^{m-1} + \dots + a_{m-1} \mu x + a_m$  con  $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

iii) DETERMINE LAS RAÍCES DE  $q(x) = 16x^4 + 8x^3 + 4x^2 - 8x + 1$

Solución:

i) Como los coeficientes de  $p(x)$  son reales,  $(1+i)$  raíz de  $p(x) \Rightarrow (1-i)$  raíz de  $p(x)$

$$\uparrow \frac{1-i}{1+i}$$

Luego  $(x - (1+i)) \mid p(x)$  y  $(x - (1-i)) \mid p(x)$

$$\Rightarrow (x - (1+i))(x - (1-i)) \mid p(x) \quad \text{ANALOGAMENTE CALCULE: } L_2 = \Gamma(b)$$

O sea,  $p(x)$  es divisible por  $(x - (1+i))(x - (1-i)) = x^2 - 2x + 2$



ii) Hagamos entonces la división:  
 $(x^4 + x^3 + x^2 - 4x + 10) : (x^2 - 2x + 2) = x^2 + 3x + 5$

$$\begin{array}{r} x^4 + x^3 + x^2 - 4x + 10 \\ -(x^4 - 2x^3 + 2x^2) \\ \hline 3x^3 - x^2 - 4x + 10 \\ -(3x^3 - 6x^2 + 6x) \\ \hline 5x^2 - 10x + 10 \\ -(5x^2 - 10x + 10) \\ \hline 0 \end{array}$$

°°  $p(x) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 3x + 5)$   
 Luego las otras dos raíces restantes se obtienen de resolver  
 $x^2 + 3x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 20}}{2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{11}}{2}i$

Las raíces son:  $r_1 = 1 + i, r_2 = 1 - i, r_3 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2}i$   
 $r_4 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2}i$  ■

ii) Notamos que  $g(x) = a_0 \mu^m x^m + a_1 \mu^{m-1} x^{m-1} + \dots + a_{m-1} \mu x + a_m$   
 $= a_0 (\mu x)^m + a_1 (\mu x)^{m-1} + \dots + a_{m-1} (\mu x) + a_m$   
 $= p(\mu x)$

Luego  $g(x) = 0 \Leftrightarrow p(\mu x) = 0 \Leftrightarrow \mu x = x_i$  para algún  $i = 1, \dots, m$   
 $x = \frac{x_i}{\mu}$

Luego las raíces de  $g(x)$  son  $\frac{x_i}{\mu}$  con  $i = 1, \dots, m$  ■

iii) Veamos que  $g(x) = 2^4 x^4 + 2^3 x^3 + 2^2 x^2 - 4 \cdot 2 x + 10$   
 (O sea es un polinomio como en ii), con  $\mu = 2$ )  
 Luego debemos obtener las raíces de  $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 - 4x + 10$ .  
 Pero en i) ya las calculamos. Luego por lo probado en ii)  
 las raíces de  $g(x)$  son:

$$x_1 = \frac{1+i}{2}, x_2 = \frac{1-i}{2}, x_3 = -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{11}}{4}i \text{ y } x_4 = -\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{11}}{4}i$$

P11 (Propuesto)

(a) Sean  $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  tal que  $z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 = 0$ . Calcular el ángulo entre  $z_1$  y  $z_2$  (es decir  $\text{Arg } z_2 - \text{Arg } z_1$ )

(b) Resuelva en  $\mathbb{C}$  la ecuación (De todas las raíces)  
 $z^5 = i$

(c) Dibuje la región  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-2| \leq |z-1|\}$

(d) Resuelva  $(z+1)^m = z^m$

$= \cos(3\alpha) + i \sin(3\alpha)$   
 $= \cos(\alpha + 0 + 2\pi) + i \sin(\alpha + 0 + 2\pi)$   
 igualando partes real e imaginaria



INDICACIONES:

(a) CONSIDERE  $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$  y  $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$  y calcule  $\theta_2 - \theta_1$ .

(b) DEBE HABER QUE LAS SOLUCIONES DE  $z^m = \rho e^{i\theta}$  SON  $z_k = \sqrt[m]{\rho} e^{i(\frac{\theta + 2\pi k}{m})}$   $k=0, \dots, m-1$ .  
Y ADemás  $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ .

(c) CONSIDERE  $z = a + bi$

(d) RESUELVA  $\left(\frac{z+1}{z}\right)^m = 1$   $\blacksquare$

P12 | SEA  $m \in \mathbb{N}$ . Pruebe que  

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^m + \left(-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^m = 2 \iff 6|m$$

Solución:

Notemos previamente que  $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{i\frac{\pi}{3}}$

$(\Leftarrow)$   $6|m \Rightarrow m=6k$  con  $k \in \mathbb{N}$ .

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^m + \left(-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^m}_A = (e^{i\frac{\pi}{3}})^{6k} + (-e^{i\frac{\pi}{3}})^{6k} = e^{i(2\pi k)} + e^{i(2\pi k)} = 1+1=2$$

$(\Rightarrow)$  Notem que si  $m$  es impar  $\Rightarrow A=0$  (No puede ser 2).  
 Luego  $m$  es par  $\Rightarrow m=2k$  con  $k \in \mathbb{N}$ .

$$\text{Luego } A = (e^{i\frac{\pi}{3}})^{2k} + (-e^{i\frac{\pi}{3}})^{2k} = 2e^{i(\frac{2\pi k}{3})} = 2$$

$$\Rightarrow e^{i(\frac{2\pi k}{3})} = 1 \Rightarrow \frac{2\pi k}{3} = 2\pi k' \text{ con } k' \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow k=3k'$$

y entonces  $m=2k=2(3k')=6k'$  con  $k' \in \mathbb{N}$ .  
 o sea  $6|m$   $\blacksquare$

P13 | SEA  $x_m + iy_m = (1+\sqrt{3}i)^m$ . Probar que  

$$x_{m-1}y_m - x_my_{m-1} = 2^{m-2}\sqrt{3}$$

Solución:

Notemos que  $1+\sqrt{3}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$\text{Luego } x_m + iy_m = (1+\sqrt{3}i)^m = (2e^{i\frac{\pi}{3}})^m = 2^m e^{i(\frac{m\pi}{3})} = 2^m \left( \cos\left(\frac{m\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{m\pi}{3}\right) \right)$$

$$\text{Luego } x_m = 2^m \cos\left(\frac{m\pi}{3}\right) \Rightarrow x_{m-1} = 2^{m-1} \cos\left(\frac{(m-1)\pi}{3}\right)$$

$$\text{y } y_m = 2^m \sin\left(\frac{m\pi}{3}\right) \Rightarrow y_{m-1} = 2^{m-1} \sin\left(\frac{(m-1)\pi}{3}\right)$$

$$\therefore x_{m-1}y_m - x_my_{m-1} = 2^{m-1} \cos\left(\frac{(m-1)\pi}{3}\right) \cdot 2 \sin\left(\frac{m\pi}{3}\right) - 2^m \sin\left(\frac{(m-1)\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{m\pi}{3}\right)$$



$$= 2^{2m-1} \cdot \left[ \text{DEN}\left(\frac{m\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{(m-1)\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{m\pi}{3}\right) \text{DEN}\left(\frac{(m-1)\pi}{3}\right) \right]$$

$$= 2^{2m-1} \text{DEN}\left(\frac{m\pi}{3} - \frac{(m-1)\pi}{3}\right) \leftarrow \text{RECUERDEN QUE } \text{DEN}(\alpha - \beta) = \text{DEN}\alpha \cos \beta - \cos \alpha \text{DEN} \beta$$

$$= 2^{2m-1} \text{DEN}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2^{2m-1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2^{2m-2} \sqrt{3} \quad \square$$

P14] (Propuesto)

DADO UN POLINOMIO  $p(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$  DEFINIR  $L(p)(x) = \sum_{k=0}^m k a_k x^{k-1}$

i) Pruebe que si  $p(x)$  y  $q(x)$  son polinomios de grado  $n$  y  $m$  respectivamente, entonces:

$$L(pq) = L(p) \cdot q + p \cdot L(q)$$

ii) Pruebe por inducción sobre  $n$  que si  $p(x) = (x-d)^n$ , entonces  $L(p)(x) = n(x-d)^{n-1}$

iii) Si  $\alpha$  es una raíz de multiplicidad  $m$  de un polinomio  $p(x)$  ( $p(x) = (x-\alpha)^m q(x)$ ) con  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $m \geq 2$ , entonces pruebe que  $\alpha$  es una raíz de multiplicidad  $m-1$  del polinomio  $L(p)(x)$ .

Hint: Para hacer (ii), use (i)

Para hacer (iii), use (i) y (ii)

P15] Sea  $p(x)$  un polinomio que deja resto  $A$  cuando es dividido por  $(x-a)$  y deja resto  $B$  cuando es dividido por  $(x-b)$ . Encuentre el resto  $r(x)$  que deja  $p(x)$  cuando es dividido por  $(x-a)(x-b)$  (con  $a \neq b$ )

Solución:

Al dividir  $p(x)$  por  $(x-a)$  nos queda:

$$p(x) = (x-a)q_1(x) + A \Rightarrow p(a) = (a-a)q_1(a) + A$$

y al dividir  $p(x)$  por  $(x-b)$  nos queda:

$$p(x) = (x-b)q_2(x) + B \Rightarrow p(b) = (b-b)q_2(b) + B$$

Luego  $p(a) = A$  y  $p(b) = B$  (en la prueba pueden decir que esto último es obvio)

Al dividir  $p(x)$  por  $(x-a)(x-b)$  nos queda:

$$p(x) = (x-a)(x-b)Q(x) + r(x) \quad (*)$$

Donde  $r(x)$  tiene grado  $< 2$  (menor que  $\text{gr}((x-a)(x-b))$ )

Luego  $r(x)$  es de la forma  $mx+n$

Debemos calcular  $m$  y  $n$

Pero de (\*),  $p(a) = (a-a)(a-b)Q(a) + r(a) = r(a)$

y análogamente  $p(b) = r(b)$

Pero como  $p(a) = A$  y  $p(b) = B$ , entonces  $r(a) = A$  y  $r(b) = B$



Pero  $r(x) = mx + m \Rightarrow r(a) = ma + m = A$   
 $r(b) = mb + m = B$

Restando las igualdades  
 $\Rightarrow m(a-b) = A-B$   
 $\Rightarrow m = \frac{A-B}{a-b} \quad (a \neq b)$

Además multiplicando por  $b$  la primera igualdad y por  $a$  la segunda igualdad, y restando la segunda de la primera igualdad

$ma b + mb = Ab$   
 $ma b + ma = Ba$   
 $\Rightarrow m(a-b) = aB - bA$   
 $\Rightarrow m = \frac{aB - bA}{a-b}$

$\Rightarrow r(x) = \left(\frac{A-B}{a-b}\right)x + \frac{aB-bA}{a-b}$

**P16** Sean los polinomios  $P(x) = x^{3a} + x^{3b+1} + x^{3c+2}$   
 $P_1(x) = x^2 + x + 1$ . Demostrar que  $P$  es divisible por  $P_1$ ,  
 cualesquiera sean los números naturales  $a, b, c$ .

**Solución:**

Notemos que al ser  $x^2 + x + 1$  un polinomio mónico de  
 tiene que  $x^2 + x + 1 = (x-\alpha)(x-\beta)$  con  $\alpha$  y  $\beta$  las raíces  
 de  $x^2 + x + 1$ .

Por lo tanto  $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$  y  $\beta^2 + \beta + 1 = 0$   
 Además  $\alpha^3 - 1 = (\alpha-1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = (\alpha-1) \cdot 0 = 0$   
 $\Rightarrow \alpha^3 = 1$

Análogamente  $\beta^3 = 1$ .

Demostremos que  $P(x)$  es divisible por  $(x-\alpha)$  y por  $(x-\beta)$   
 lo cual es equivalente a que

$P(\alpha) = 0$  (a raíz de  $P(x)$ )

y  $P(\beta) = 0$

Veamos:  $P(\alpha) = \alpha^{3a} + \alpha^{3b+1} + \alpha^{3c+2}$   
 $\alpha^3 = 1 \Rightarrow = (\alpha^3)^a + (\alpha^3)^b \cdot \alpha + (\alpha^3)^c \cdot \alpha^2$   
 $= 1 + \alpha + \alpha^2 = 0$

Análogamente  $P(\beta) = 0$ .  $\square$

**P17** Demuestre que

$$\sum_{k=1}^{m-1} \cot\left(\frac{k\pi}{m}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2m}\right)$$



Solución:

$$\sum_{k=1}^{m-1} z^{2k} = \sum_{k=1}^{m-1} (z^2)^k = z^2 \left( \frac{1 - (z^2)^{m-1}}{1 - z^2} \right) = \frac{z^2 - (z^2)^m}{1 - z^2} = \frac{z^2 + 1}{1 - z^2}$$

Pero  $(z^2)^m = z^{2m} = (e^{\frac{\pi i}{2m}})^{2m} = e^{\pi i} = -1$

Notemos que  $z^{-1} = e^{-\frac{\pi i}{2m}} = \cos\left(-\frac{\pi}{2m}\right) + i \operatorname{DEN}\left(-\frac{\pi}{2m}\right)$   
 $= \cos\left(\frac{\pi}{2m}\right) - i \operatorname{DEN}\left(\frac{\pi}{2m}\right)$

y que  $z = e^{\frac{\pi i}{2m}} = \cos\left(\frac{\pi}{2m}\right) + i \operatorname{DEN}\left(\frac{\pi}{2m}\right)$

Luego  $\frac{z^2 + 1}{1 - z^2} = \frac{z + z^{-1}}{z^{-1} - z} = \frac{2 \cos\left(\frac{\pi}{2m}\right)}{-2i \operatorname{DEN}\left(\frac{\pi}{2m}\right)} = i \cot\left(\frac{\pi}{2m}\right)$

dividiendo  
por  $z$  arriba  
y abajo

Notemos que  $z^{2k} = (e^{\frac{\pi i}{2m}})^{2k} = e^{\frac{\pi k i}{m}} = \cos\left(\frac{\pi k}{m}\right) + i \operatorname{DEN}\left(\frac{\pi k}{m}\right)$

Luego  $\sum_{k=1}^{m-1} z^{2k} = \sum_{k=1}^{m-1} \left( \cos\left(\frac{\pi k}{m}\right) + i \operatorname{DEN}\left(\frac{\pi k}{m}\right) \right) = i \cot\left(\frac{\pi}{2m}\right)$   
 $= \left[ \sum_{k=1}^{m-1} \cos\left(\frac{k\pi}{m}\right) \right] + i \left[ \sum_{k=1}^{m-1} \operatorname{DEN}\left(\frac{k\pi}{m}\right) \right] = i \cot\left(\frac{\pi}{2m}\right)$

Iguando partes reales y partes imaginarias de  
concluimos que:

$$\sum_{k=1}^{m-1} \cos\left(\frac{k\pi}{m}\right) = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{m-1} \operatorname{DEN}\left(\frac{k\pi}{m}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2m}\right)$$

P18 Demostrar que

$$\prod_{k=0}^{m-1} (\omega_k^2 - 2\omega_k \cos\theta + 1) = 2(1 - \cos(m\theta))$$

donde  $\omega_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{m}\right) + i \operatorname{DEN}\left(\frac{2k\pi}{m}\right)$  (las raíces  $m$ -ésimas de la unidad)

$$\Rightarrow (x - (1+i))(x - (1-i)) \dots$$



Hint: Considera sabido que

$$x^m - 1 = (x - \omega_0)(x - \omega_1) \dots (x - \omega_{m-1}) = \prod_{k=0}^{m-1} (x - \omega_k)$$

(20)

Solución:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

Notemos que:

$$\begin{aligned} \omega_k^2 - 2\omega_k \cos \theta + 1 &= \omega_k^2 - 2\omega_k \cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \\ &= (\omega_k - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta \\ &= (\omega_k - \cos \theta)^2 - (i \sin \theta)^2 \\ &= (\omega_k - (\cos \theta - i \sin \theta))(\omega_k - (\cos \theta + i \sin \theta)) \\ &= ((\cos \theta - i \sin \theta) - \omega_k)((\cos \theta + i \sin \theta) - \omega_k) \\ &= (e^{-i\theta} - \omega_k)(e^{i\theta} - \omega_k) \end{aligned}$$

Siguiendo la indicación:

$$\prod_{k=0}^{m-1} (\omega_k^2 - 2\omega_k \cos \theta + 1) = \prod_{k=0}^{m-1} ((e^{-i\theta} - \omega_k)(e^{i\theta} - \omega_k))$$

Indicación:

$$\begin{aligned} &= \prod_{k=0}^{m-1} (e^{-i\theta} - \omega_k) \cdot \prod_{k=0}^{m-1} (e^{i\theta} - \omega_k) = \prod_{k=0}^{m-1} a_k \prod_{k=0}^{m-1} b_k \\ &= ((e^{-i\theta})^m - 1)((e^{i\theta})^m - 1) \\ &= (e^{-im\theta} - 1)(e^{im\theta} - 1) \\ &= 1 - \underbrace{(e^{-im\theta} + e^{im\theta})}_{2 \cos(m\theta)} + 1 = 2 - 2 \cos(m\theta) \\ &= 2(1 - \cos(m\theta)) \quad \square \end{aligned}$$

Esta guía contempla dos temas muy importantes que son los complejos y los polinomios. Hasta esta fecha aún no se dio en polinomios en el control 3, pero es seguro que entrará en el control recuperativo y en álgebra del 2º semestre. "Complejos" con un arma muy poderosa que permite de tirar cosas que antes eran muy complicadas.

De agradece mucho la confianza en estas guías y ojalá es hayan sido una buena ayuda. También agradezco las buenas palabras que me han motivado a seguir preparando con esmero estas guías para que queden lo mejor posible. También agradezco los mails a drainequ@ya.com, así como conductas, con agradecimiento y especialmente a las críticas constructivas. La clave del éxito de una persona en dos partes: 1% talento y 99% de arduo trabajo.

Mucha  
Diente y  
hasta siempre

DAVID  
ALEJANDRO  
PINEQUEO  
SANTORO

Sección

04