Auxiliar 12: Curvas en el espacio I

Profesor: Raul Manasevich T.
Auxiliar: Patricio Santis T.
15 de Junio de 2012

Objetivos: **Expander el pensamiento a funciones en** $\mathbb{R}^3$

$\boxed{P1}$ Parametrice la curva definida sobre la esfera unitaria, que en coordenadas cilíndricas cumple las siguientes relaciones: $z(\theta) = e^{-\theta}$ y $4\rho^2 + 8z \geq 7$.

$\boxed{P2}$ Considere la curva definida por la parametrización $\vec{r}(t) = (e^{-t}\cos(t), e^{-t}\sin(t), e^{-t})$, $t \in [0, 2\pi]$.
$a)$ Demuestre que la curva esta contenida en el cono de ecuación $x^2 + y^2 = z^2$
$b)$ Demuestre que en cada punto de la curva, el vector tangente forma un ángulo constante con el vector $\dfrac{\vec{r}(t)}{||\vec{r}(t)||}$.
$c)$ Calcule los vectores $\widehat{N}(t)$, $\widehat{B}(t)$ y la curvatura $\kappa(t)$ y la torsión $\tau(t)$.

$\boxed{P3}$ Considere una función $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y positiva, ademas de $a, b > 0$. Definamos la curva Γ mediante la parametrización:

$$\vec{r}(t) = \left(a \cdot \int_0^t \sin(q(u))du, a \cdot \int_0^t \cos(q(u))du, bt\right)$$

$a)$ Encontrar su parametrización en longitud de arco.
$b)$ Encontrar los vectores tangente, normal y binormal.
$c)$ Encontrar su curvatura y torsión.

$\boxed{P4}$ Considere una curva Γ que se obtiene de la intersección de la superficie $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $x^2+y^2-2ay = 0$, donde $a > 0$.
$a)$ Encuentre una parametrización para Γ.
$b)$ Si Γ es un alambre de densidad de masa $\rho(x, y, z) = \dfrac{2a}{\sqrt{8a^2 - x^2 - y^2}}$. Calcular la masa del alambre.

$\boxed{P5}$ Considere la curva Γ que se forma al intersectar las superficies, con $z > 0$

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$x^2 + z^2 = 4 + y^2$$

$a)$ Parametrice Γ.
$b)$ Calcule el centro de masa suponiendo densidad lineal de masa dada por $\rho(x, y, z) = xy$.

$\star$ Hallar los puntos sobre la curva Γ parametrizada como $\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), \cos(t))$, en los cuales la curvatura $\kappa(t)$ presenta sus valores críticos.