# Auxiliar 10: Aplicaciones de la Integral I

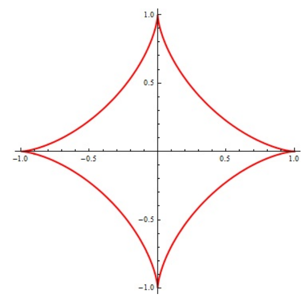
**Profesor:** Raul Manasevich T.
**Auxiliar:** Patricio Santis T.
30 de Mayo de 2012

Objetivos: **Comprender las aplicaciones de la integral sobre funciones en $\mathbb{R}^2$**

$\boxed{P1}$ Sea $f(x) = -6x^2 + 5x + 1$. Considere sobre la parábola el punto $(a, f(a))$ $a \geq 0$. Demuestre que el área comprendida entre la parábola y el segmento que une $(0,1)$ con $(a, f(a))$ es igual a $a^3$.

$\boxed{P2}$ Sea $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$. Si se tiene que $R = \{(x,y) \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq f(x)\}$.
*a*) Dibuje $R$ y luego encuentre el área de $R$.
*b*) Calcule el volumen que se obtiene al rotar $R$ en torno al eje $OX$.

$\boxed{P3}$ Considere la curva $\Gamma$ de la figura adjunta llamada Astroide, definida por $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$; para $a = 1$ se pide:




*a*) Demostrar que la longitud total de la curva es 6 u.m.

*b*) Calcular el área de la superficie de revolución que se obtiene al girar, en torno al eje $x$.

$\boxed{P4}$ Graficar y calcular el área de $r(\theta) = a(1-\sin(\theta))$ entre 0 y $r = a$. Repita para $\rho(\theta) = 1+2\sin(\theta)$ y $\rho = 3$.

$\boxed{P5}$ Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ de clase $C^1$ y tal que $f(0) = 1$. Si la longitud de la curva $y = f(x)$ entre 0 y $x$ es igual a $e^x - f(x)$, se pide:
*a*) Determinar $f(x)$.
*b*) Demostrar que $\forall x > 0$, el área bajo la curva $y = f(x)$ (determinada en *a*)) es numericamente igual a la longitud de la curva a la longitud de la curva entre 0 y $x$.
*c*) Calcule las coordenadas del centro de gravedad del área bajo la curva $y = f(x)$ entre $x = -1$ y $x = 1$.

$\boxed{P6}$ Para $\alpha \in (0,1)$ sea $R$ la región encerrada por la curva $f(x) = x^\alpha$, el eje $OY$ y la recta tangente a $f$ en el punto $x_0 = 1$.
*a*) Demostrar que el área de $R$ está dada por $A = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2(1+\alpha)}$.
*b*) Demostrar que el volumen del sólido generado por la rotación de la región $R$ en torno al eje $OY$ es $V_{OY} = \pi\frac{\alpha(1-\alpha)}{3(2+\alpha)}$
*c*) Calcule el perimetro de $R$ para $\alpha = 3/2$.

---

$\star$ Dadas las curvas $y = mx$, $x \geq 0$, $m > 0$ y $y = x^{1/2}$, considere la región limitada por estas curvas en el primer cuadrante y encuentre el valor de $m$ para que los volúmenes generados por esta región al girar en torno al eje $OX$ y al eje $OY$ sean iguales.