Auxiliar 9: Extra C2

Profesor: Raul Manasevich T.
Auxiliar: Patricio Santis T.
16 de Mayo de 2012

Objetivos: **Reforzar contenidos C2. Semana 5 - 8**

$\boxed{P1}$ Demostrar que $\exists \xi \in (1, e)$ tal que, $\displaystyle\int_1^e (\ln(x))^{n+1} = (\ln(\xi))^n$, $n \geq 1$. Concluya que $\displaystyle\int_1^e (\ln(x))^{n+1} \leq \ln(\xi)$.

$\boxed{P2}$ Sean $f, g : [0, 1] \to [0, 1]$ dos funciones continuas. Además se sabe que g es derivable en $(0, 1)$ y satisface que: $g(1) < 1$ y $0 \leq g'(x) \leq 1\ \forall x \in (0, 1)$.

Considere la función $F(x)$ definida en $[0, 1]$ por $F(x) = 2x - 1 - \displaystyle\int_0^{g(x)} f(t)dt$.

$i)$ Probar que F es continua y posee a lo menos un cero en el intervalo $[0, 1]$.
$ii)$ Probar que F es derivable en $(0, 1)$ y que es estrictamente creciente en el intervalo. Deducir que el cero de F es único.

$\boxed{P3}$ Sea $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1 - x$. Indique por qué f es integrable en $[0, 2]$. Calcule el valor de la suma superior e inferior asociada a f y una partición equiespaciada de $[0, 2]$ de n términos. Deducir el valor de la integral $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx$. (SIN TFC).

$\boxed{P4}$ Encuentre el desarrollo en serie de Taylor en torno a $x_0 = 0$ para $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$. Encuentre una cota aproximada del resto integral para $x = 1/2$.

$\boxed{P5}$ Sea $G(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{-|x-y|} f(y)dy$. Calcule su derivada.

$\boxed{P6}$ Sea f integrable, calcule $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin(x))}{f(\sin(x)) + f(\cos(x))} dx$ mediante el cambio de variable $x = \pi/2 - t$. Deduzca el valor de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n(x)}{\sin^n(x) + \cos^n(x)} dx$, con $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{P7}$ Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\displaystyle\int_1^x (x-1)\sin(t^2)dt}{\displaystyle\int_1^{x^2} \sin(t^2-1)dt}$.

$\star$ Analice la siguiente función $g(x) = \displaystyle\int_0^x (t-1)e^{-t^2} dt$, $x \geq 0$, determinando dominio, continuidad, ceros, mín, máx, asíntotas (todo tipo), recorrido, crecimiento, puntos de inflexión y gráfica. **Nota**: $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$