Problemas propuestos C2

Profesor: Raul Manasevich T.
Auxiliar: Patricio Santis T.
Mayo de 2012

Objetivos: **Sacarse un 7.0 en el Control**

$\boxed{P1}$ Probar que la ecuación $\int_0^x e^{t^2}dt = 1$ tiene solución única en el intervalo $[0,1]$. Justifique.

$\boxed{P2}$ Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ integrable y $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt & \text{si} \quad x \neq 0 \\ f(0) & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

$i)$ Probar que si f es continua en cero, entonces F es continua en $\mathbb{R}$.

$ii)$ Probar que si f es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en cero, F es derivable en $\mathbb{R}$ y además $F'(0) = \dfrac{f'(0)}{2}$.

$\boxed{P3}$ Calcular la derivada de la función $\displaystyle\int_0^{|x^3|} \sin(t^2)dt$, en los puntos donde exista.

$\boxed{P4}$ Calcule los siguientes limites

$i)$ $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\int_1^x (x-1)\sin(t^2)dt}{\int_{x^2}^{x^3} \sin(t^2-1)dt}$

$ii)$ $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2} \frac{\frac{e}{4\pi}(4x^2-\pi^2) + \int_x^{\pi/2} e^{\sin(t)}dt}{1+cos(2x)}$

$\boxed{P5}$ Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}^+$ integrable en $[a,b]$, cóncava y creciente. Demostrar que

$$\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq f(b)(b-a).$$

Indique cual de las dos desigualdades es consecuencia de la concavidad de f en $[a,b]$.

$\boxed{P6}$ Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de clase C^2 con $f''(x)\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Demuestre que si $g(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} (x-t)f(t)dt$, entonces $g''(x) < 0$.

$\boxed{P7}$ Calcular MUCHAS integrales. Por ejemplo:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \qquad \int x^3\sqrt{5-2x^2} \qquad \int \frac{e^{3x}}{e^x-1} \qquad \int \frac{dx}{e^{3x}\sqrt{1-e^{-2x}}} \qquad \int \frac{4x^3-3x^2+3}{(x-1)^2(x^2+1)}$$

★ Vacía tu mente, se amorfo, moldeable, como el agua. Si pones agua en una taza se convierte en la taza. Si pones agua en una botella se convierte en la botella. Si la pones en una tetera se convierte en la tetera. El agua puede fluir o puede golpear. Sé agua amigo mío. **Bruce Lee**