Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1002 Cálculo Diferencial 10-2

Control 2

P1|

a) Considere las funciones $f(x) = x$, $g(x) = \sin(x)$, y las constantes $a = 0$, $b = \pi$. Encuentre el valor de ξ que verifica la ecuacion.

$$\int_a^b f(x)\sin(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx \quad (1)$$

b) Sean f, g, funciones continuas en $\mathbb{R}$, con f monotona, derivable y con derivada continua. Demuestre que para $\forall a,b \in \mathbb{R}$, con $a < b$ existe $\xi \in [a,b]$ demuestre que existe $\xi \in [a,b]$ que satisface la ecuacion (1) de la parte a).

Indicacion: Defina $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$ e integre por partes.

P2|

a) Dado $n \in \mathbb{N}$, calcule las integrales

$$\int_0^1 \sin(n\pi x)\,dx \text{ y } \int_0^1 x\sin(n\pi x)\,dx$$

y verifique que ambas tienden a 0 cuando $n \to \infty$

b) Para demostrar que, en general

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \sin(n\pi x)\,f(x) = 0, \ (2)$$

para toda funcion f derivable, con derivada acotada, defina $I_n = \int_0^1 \sin(n\pi x)\,f(x)\,dx$

y realice lo siguiente:

b1) Usando el cambio de variable $x = u + \frac{1}{n}$, pruebe que

$$I_n = \int\limits_{1-\frac{1}{n}}^{1} \sin(n\pi x)\, f\left(x + \frac{1}{n}\right) dx - \int\limits_{-\frac{1}{n}}^{0} \sin(n\pi x)\, f\left(x + \frac{1}{n}\right) - \int\limits_{0}^{1} \sin(n\pi x)\, f\left(x + \frac{1}{n}\right) dx$$

$b2$) Usando lo anterior y sumando las dos formas de I_n, pruebe que:

$|2I_n| \leqslant \frac{2}{n} M(|f|) + \frac{1}{n} M(|f'|)$,

donde $M(|f|)$ y $M(|f'|)$ son los maximos de $|f|$ y $|f'|$ respectivamente,

con esto concluya (2)

P3)

a) Demuestre que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{i}{n}\right)}$. Tomando logaritmo y usando sumas de riemann, calcule $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$

b) Considere $I_{n,m} = \int\limits_0^1 (1-x)^x x^m dx$, con n, $m \in \mathbb{N}$

b1) Pruebe que, $\forall n \geqslant 1$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $I_{n,m} = \frac{n}{m+1} I_{n-1,m+1}$

b2) Use lo anterior para calcular explicitamente el valor de $I_{n,m}$

c) Calcule la primitiva $\int \frac{x^2 - x + 1}{x(x^2+1)} dx$

Tiempo: 3 Horas