Auxiliar 3: Aplicaciones de la derivada

Profesor: Raul Manasevich T.
Auxiliar: Patricio Santis T.
13 de Abril de 2012

Objetivos: **Aplicaciones de la derivada sobre cuerpos, estudio de funciones, máximos y mínimos, TVM, regla L'hopital**

$\boxed{P1}$ Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos veces derivable en $\mathbb{R}$. Dado un punto $a \in \mathbb{R}$ (conocido), y un real $h > 0$, se define la función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por $g(t) = f(t) + f'(t) \cdot (a + h - t)$. Aplicar T.V.M. a la función g para probar que $\exists c \in (a, a + h)$ tal que:

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + hf''(c)(a + h - c)$$

$\boxed{P2}$ Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones derivables tales que $f(0) = g(0) = 1$ y además

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -xf(x) \text{ y } g'(x) = xg(x)$$

$i)$ Pruebe que la función $f \cdot g$ es constante. Deduzca que $(\forall x \in \mathbb{R})$ $f(x) > 0$ y $g(x) > 0$.
$ii)$ Estudiar el crecimiento, máximos y mínimos de la función f.
$iii)$ Calcular f'' en función de f. Estudiar la convexidad y concavidad de f.
$iv)$ Demostrar que $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus 0)$ $\exists c \in (0, x)$ tal que $f(x) = -f''(c)$.
$v)$ Estudiar el crecimiento de f' y demostrar que f' es acotada en $\mathbb{R}$.
$vi)$ Deduzca que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Bosquejar un gráfico de f.

$\boxed{P3}$ Calcular los siguiente limites:

$$\lim_{x\to\infty}\left(cos\left(\frac{2}{x}\right)\right)^{x^2} \qquad \lim_{x\to 0^+} x^x \qquad \lim_{x\to 0}(cos(x) + sin(x))^{\frac{1}{x}} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x \cdot sin(x)}{e^{x^2} - 1}$$

$\boxed{P4}$ Considere la función $f(x) = x - 1 + \dfrac{\ln(x)}{x}$
$i)$ Establezca dominio y encuentre los ceros
$ii)$ Encuentre asíntotas horizontales, verticales y oblicuas.
$iii)$ Calcular f' y demostrar que f es estrictamente creciente. **Hint**: use que $\ln(x) \leq x - 1, \forall x > 0$.
$iv)$ Calcular f''. Estudiar convexidad y puntos de inflexión.
$v)$ Bosqueje su gráfica.

$\boxed{P5}$ Aplicando TVM a $f(x) = \alpha x - x^\alpha$, demostrar que para $x \in [0, 1]$ y $0 < \alpha < 1$ se tiene que: $x^\alpha \leq \alpha x + (1 - \alpha)$. Deduzca que, $a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1 - \alpha)b$ con $a, b > 0$.

★ Dada $f(x) = \sum_{i=1}^{n}(a_i - x)^2$, encuentre su mínimo, con $a_i \in \mathbb{R}$ y demuestre que $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leq n\sum_{i=1}^{n} a_i^2$.