

Problemas propuestos C3

Profesor: Raul Manasevich T.

Auxiliar: Patricio Santis T.

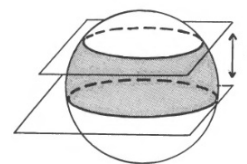
Junio de 2012

Objetivos: **Sacarse un 7.0 en el Control y EXIMIRSE!!**

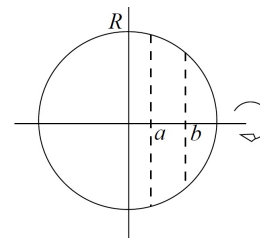
[P1] Considere una esfera de radio r , se pide:

a) Pruebe que el área de la esfera es $4\pi r^2$.

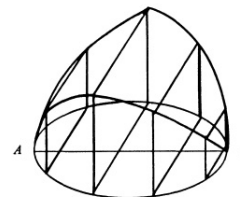
b) Demuestre que el área de la porción de esfera comprendida entre 2 planos paralelos a distancia h es $2\pi rh$.



c) Muestre que para $0 \leq a < b < r$, la porción de la esfera, $a \leq x \leq b$, tiene superficie $2\pi r(a - b)$.



[P2] La figura adjunta muestra un sólido de base circular de radio R . Cada plano perpendicular al diámetro $\overline{AB}$ intersecta al sólido en un cuadrado. Exprese el volumen del sólido como una integral y calculela.



[P3] [C3-10/2] A dos esferas macizas de radios R_1 y R_2 se les taladran perforaciones cilíndricas de radios r_1 y r_2 respectivamente, a través de sus centros generando sólidos de alturas h_1 y h_2 . Demuestre que si ambos sólidos resultantes tienen el mismo volumen entonces $h_1 = h_2$.

[P4] [C3-10/2] Considere las funciones reales $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ y $g(x) = mx$, donde $m \in (0, 1)$.

a) Calcular el área de la región R que en el primer cuadrante encierran a f y g .

b) Calcule el volumen del sólido de revolución generado por la rotación de R en torno al eje OY .

[P5] Sea la curva Γ parametrizada por $\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} 4 \cos t \\ 4 \sin t \\ 4 \cos t \end{bmatrix}$, donde $t \in \mathbb{R}$. Calcule $\hat{T}(t)$, $\hat{N}(t)$, $\kappa(t)$ y $\hat{B}(t)$.

P6 Considere la curva en $\mathbb{R}^2$ parametrizada por $\vec{r}(t) = \left(\int_1^t \frac{\cos u}{u} du, \int_1^t \frac{\sin u}{u} du \right)$, $t \in [1, t_0]$.

Calcule el largo de la curva entre $t = 1$ y $t = t_0$, sabiendo que $t = t_0$ es el primer instante mayor a 1, donde el vector tangente a la curva es vertical.

P7 Calcular la masa de un alambre que tiene la forma de una circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = R^2$, si su densidad de masa es $\rho(x, y) = 2|x| + |y|$.

P8 Sea g una función continua en $\mathbb{R}$. Sea C una curva parametrizada en $\mathbb{R}^3$ por:

$$\vec{r}(t) = \left(\int_0^t g(u) du, \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{t^2} g(u) du, \frac{1}{3} \int_0^{t^3} g(u) du \right)$$

a) Calcule el vector velocidad, rapidez y la tangente.

b) Si $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{3}{2}} g(t) = 0$, entonces el largo de C es finito.

P9 La curva en $\mathbb{R}^3$ de parametrización $\vec{r}(t) = (\sin^2(t), \sin(t) \cos(t), \cos(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, pasa dos veces por el punto $(1, 0, 0)$. Demuestre que las dos tangentes en ese punto son perpendiculares.

P10 Una partícula sube por una superficie parabólica de ecuación $x^2 + y^2 + z = \pi$ siguiendo un camino Γ de modo de alcanzar una vuelta en la superficie.

a) Usando coordenadas cilíndricas, deducir una parametrización de Γ , sabiendo que se cumple $z = a\theta$, $a > 0$ y $\vec{r}(0) = (\sqrt{\pi}, 0, 0)$.

b) Determine el vector tangente de la curva.

P11 Dada una región del plano limitada por una curva del tipo $r = f(\theta)$ y por las curvas $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$, con $\alpha < \beta$.

a) Demostrar que el área del manto obtenida al rotar la curva $r = f(\theta)$ en torno al eje Y , esta dada por

$$A = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r |\cos(\theta)| \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2} d\theta.$$

b) Considere la curva $r = e^{\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$

b,1) Dibuje r .

b,2) Calcule el área de r , entre $r = 1$ y $r = e^{\pi/2}$.

b,3) Utilizando la parte a), rote la curva r para $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ en torno al eje Y , calcule el área del manto.

Nota: Repita para $r = 2 + 2 \sin(\theta)$.

P12 Dibuje, calcule la longitud de arco y la curvatura de las curvas descritas por $\vec{r}_1(t) = (t, \cosh(t))$ y $\vec{r}_2(t) = (t, \frac{t^2}{\sqrt{2}}, t^3)$

P13 Se tiene una curva regular $\vec{r}(s)$ parametrizada por longitud de arco, con curvatura $\kappa(s)$ y torsión $\tau(s)$ definidas en $\mathbb{R}^3$. Determinar la curvatura de $\vec{r}'(s)$. **Hint:** Podría serle útil aplicar el triedro de Frenet.

★ "Nuestra mayor gloria no está en no haber caído nunca, sino en levantarnos cada vez que caemos" – Oliver Goldsmith