Auxiliar 1: Continuidad y derivadas

Profesor: Raul Manasevich T.
Auxiliar: Patricio Santis T.
30 de Marzo de 2012

Objetivos: **Continuidad, Teorema de Bolzano-Weierstrass, TVI, Teorema de Bolzano (o Rolle), Continuidad uniforme, Derivadas importantes y propiedades de las derivadas.**

$\boxed{P1}$ Sea la función $f(x) = x^{13} + 7x^3 - 5$. Probar que es una función continua y que EXISTE un único real $x_0 \in \mathbb{R}$, tal que $f(x_0) = 0$.

$\boxed{P2}$ Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2}{x+a} & \text{si} \quad x < a \\ 2x - e^{x-a} & \text{si} \quad x \geq a \end{cases}$

a) Calcule a de modo que f sea continua
b) ¿Es f continua en los reales? Si no es así, establezca su nuevo dominio.
c) Demuestre usando $T.V.I.$ que f se anula en algún punto del intervalo $[1, +\infty)$.

$\boxed{P3}$ Estudie la continuidad uniforme de $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$ y $h(x) = e^x \cos(\frac{1}{x})$, en el intervalo $(0, 1)$.

$\boxed{P4}$ Sea g una función continua y a la vez par. Demostrar que g' es una función impar.

$\boxed{P5}$ Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\{0\}$ derivable en 0 tal que $f(x+y) = f(x)f(y)\ \forall x, y \in \mathbb{R}$. Probar que f es derivable en todo punto y que $f'(\overline{x}) = f'(0)f(\overline{x})$.

$\boxed{P6}$ Calcule la derivada de $f(x) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{3n-2k}$ y encuentre $f'(1)$.

$\boxed{P7}$ Sea $h(x) = (f(x))^3$ donde f es una función derivable tal que $f(0) = -1/2$, $f'(0) = 8/3$. Encuentre la ecuación de la recta tangente al gráfico de h en $x = 0$.

$\boxed{P8}$ Sea $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$, si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ si $x = 0$.
a) Demostrar que f es continua en $\mathbb{R}$.
b) Demostrar que f es derivable en $\mathbb{R}$. Calcular f'.

★ Analice si la función definida por $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$, es continua en $\mathbb{R}$.