MA1001-3: Introducción al Cálculo.
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Ítalo Riarte C.

Auxiliar 14: Derivadas.

- *Definición* : $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

- *Álgebra de Derivadas* : La suma, resta y ponderación se portan como debe ser, mientras que para el producto y cuociente se tienen las fórmulas: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ y $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$.

- *Regla de la cadena* : Bajo ciertas hipótesis se cumple que $(g \circ f)' = g'(f) \cdot f'$.

- *Derivada de la Inversa* : Si f es derivable $\Rightarrow (f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1})}$.

- *Derivadas conocidas* : $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $(e^x)' = e^x$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$.

....

P1. Derive las siguientes funciones:

a) $f_1(x) = \left(1 + \ln(e^x + 1) + x^2\right)^3$.

b) $f_2(x) = a^x + x^a + e, \quad a > 0$.

c) $f_3(x) = \cos^3(e^{3x}) + \cos^{\operatorname{sen}(2x)}(x) + \cos(x^{\operatorname{sen}(2x)})$.

d) $f_4(x) = \sqrt[n]{\frac{x - \tan(2x)}{x + \sec(x)}} + \operatorname{arcsen}\left(e^{-x}\sqrt{\tan\left(\frac{1}{5x}\right)}\right)$.

P2. Sea $f(x) = \frac{\arctan\left(x\right)}{x}$, si $x \neq 0$, con $f(0) = 1$. Demuestre que la función es derivable y calcule su derivada para cada $x \in \mathbb{R}$.

P3. (a) Escriba la ecuación de la recta tangente a la curva, definida implícitamente por la relación:

$$x^3y^3 + xy = 2,$$

en el punto $P = (x_0, y_0)$, del primer cuadrante. Pruebe que la recta tangente corta a los ejes coordenados en A y B de modo que P es el punto medio del trazo $\overline{AB}$.

(b) Para $f(x) = x^2 + x$ determine la ecuación de la recta tangente (ℓ_T) y normal (ℓ_N) en el punto $x = x_0$. Determine el conjunto Ω definido por:

$$\Omega = \left\{x_0 \in \mathbb{R} : \left(2, -3\right) \in \ell_T\right\}$$

P4. Sea f diferenciable en $x = x_0$ y en $x = 0$, Calcule los siguientes límites:

(i) $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0 - h)}{h}$.

(ii) $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0 + \beta h)}{h}$.

(iii) $\lim_{h \to 0} \frac{f(h^2) - f(3h)}{h}$.