MA1001-3: Introducción al Cálculo.
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Ítalo Riarte C.

Auxiliar 13: Límite de Funciones (II).

P1. Encuentre asíntotas de todo tipo para las siguientes funciones.

(a) $f(x) = 1 + xe^{\frac{1}{x}}$.

(b) $g(x) = \ln(1 + e^x)$.

(c) $h(x) = \dfrac{x^2 + |\,x\,| + 1}{x - |\,x\,|}$.

P2. Calcule, si es posible, los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$.

(b) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{\ln(3x)}{\ln(x)}\right)^{\ln(x^2)}$.

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$.

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{\sin x}}{x}$.

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 + 2x^2)}{1 - \cos 5x}$.

(f) $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}} \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$.

(g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x + \cos(\pi x)}{\sqrt{x} - 1}$.

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{b}{x}\left[\dfrac{x}{a}\right] \quad a, b > 0$.

(i) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\ln(x) - \ln(a)}{e^x - e^a}$.

(j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{senh}(x)}{x}$.

P3. Sea f una función definida por: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{a^x - b^x}{\ln(1 + x)} & x > 0 \\ \dfrac{e^{a/x} + \operatorname{sen} bx}{x} & x < 0 \end{cases}$ y $f(0) = 1$.

(a) Encuentre una relación entre $a, b > 0$, que asegure la existencia de $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

(b) ¿Es $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$? Si la respuesta anterior no es afirmativa, indique en qué caso lo es.

P4. Demuestre usando la definición $\varepsilon - \delta$, que las siguientes afirmaciones son verdaderas.

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x + 3} = 2$.

(b) $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$.

(c) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1$.

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2x^2} = +\infty$.

Resumen Materia Control 6

Asíntotas : Las asíntotas *horizontales*, *verticales* y *oblicuas* se denotarán por AH, AV y AO,

AH : Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell_1 \Rightarrow y=\ell_1$ es AH de f. Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell_2 \Rightarrow y=\ell_2$ es otra AH de f.

AV : $x=x_0$, es AV de f ssi: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\pm\infty$ o bien $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\pm\infty$.

AO : $y=m_1x+n_1$, es AO de f, hacia $+\infty$ ssi: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(m_1x+n_1)=0$. Se puede deducir que:

$$m_1=\lim_{x\to+\infty}\tfrac{f(x)}{x} \qquad \text{y} \qquad n_1=\lim_{x\to+\infty} f(x)-mx.$$

$y=m_2x+n_2$, es AO de f, hacia $-\infty$ ssi: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(m_2x+n_2)=0$. En forma análoga:

$$m_2=\lim_{x\to-\infty}\tfrac{f(x)}{x} \qquad \text{y} \qquad n_2=\lim_{x\to-\infty} f(x)-mx.$$

Caracterización $\varepsilon-\delta$ del límite (varias versiones), sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Recordemos que $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\bigcup\{-\infty,+\infty\}$.

- $\lim\limits_{x\to\overline{x}} f(x)=\ell \iff \left(\forall\varepsilon>0\right)\left(\exists\delta>0\right):\ \left[0<\left|x-\overline{x}\right|<\delta\right]\Rightarrow\left|f(x)-\ell\right|<\varepsilon$

- $\lim\limits_{x\to\overline{x}} f(x)=\infty \iff \left(\forall M>0\right)\left(\exists\delta>0\right):\ \left[0<\left|x-\overline{x}\right|<\delta\right]\Rightarrow f(x)>M$ (análogo para $-\infty$)

- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\ell \iff \left(\forall\varepsilon>0\right)\left(\exists m>0\right):\left(\forall x>m\right),\ \left|f(x)-\ell\right|<\varepsilon$ (análogo para $-\infty$)

- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty \iff \left(\forall M>0\right)\left(\exists m>0\right):\left(\forall x>m\right),\ f(x)>M$ (análogo para $-\infty$)

Para $-\infty$ es análogo pues, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l \iff \lim\limits_{x\to\infty} f(-x)=l \iff \lim\limits_{x\to\infty} -f(-x)=-l$. Con $l\in\overline{\mathbb{R}}$.

- *Límites importantes* que deben manejar:

$\bullet \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$ $\bullet \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}.$ $\bullet \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$

$\bullet \lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1.$ $\bullet \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(x)}{x-1}=1.$

Notemos que tanto $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$, como $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x}$, son deducibles de $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

• Importante: • La función $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$, recuerden que $\lim\limits_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}}=0$ y $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}}=1$.

Es por este motivo que esta función suele ser preguntable en cálculos de asíntotas.

• La exponencial siempre le "gana" a un polinomio, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty=\lim\limits_{x\to0^+} xe^{\frac{1}{x}}$.