MA1001-3: Introducción al Cálculo.
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Ítalo Riarte C.

Auxiliar 12: Límite de Funciones (I).

- Se dice que $\lim\limits_{x\to\overline{x}} f(x)=\ell$, si para *toda* sucesión $x_n \in \mathrm{Dom}(f)$, no constante, tal que $x_n \to \overline{x}$, se tiene que $f(x_n)\to \ell$.
- *Límite a través de un conjunto*: Sea $\mathcal{B}\subseteq \mathrm{Dom}(f)$, $\lim\limits_{\substack{x\to\overline{x}\\ x\in\mathcal{B}}} f(x)=\ell$, si para para *toda* sucesión $x_n\in\mathcal{B}$, no constante, con $\overline{x}\in\mathcal{B}'$, tal que $x_n\to\overline{x}$, se tiene que $f(x_n)\to\ell$.
- *Límites laterales*: Sea $\mathcal{B}^+=\mathrm{Dom}(f)\bigcap(\overline{x},+\infty)$ y $\mathcal{B}^-=\mathrm{Dom}(f)\bigcap(-\infty,\overline{x})$ se definen los límites laterales por la derecha y por la izquierda respectivamente como:

$$\lim_{x\to\overline{x}^+} f(x)=\lim_{\substack{x\to\overline{x}\\ x\in\mathcal{B}^+}} f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to\overline{x}^-} f(x)=\lim_{\substack{x\to\overline{x}\\ x\in\mathcal{B}^-}} f(x).$$

- *Propiedad importante* : $\lim\limits_{x\to\overline{x}} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\overline{x}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\overline{x}^-} f(x)=\ell$.
- *Herencia de sucesiones* : Unicidad del límite, álgebra del límites, teorema del sandwich, etc.
- *Cambio de Variable* : Si $\lim\limits_{x\to\overline{x}} f(x)=\ell$ y $\lim\limits_{x\to\ell} g(x)=L \Rightarrow \lim\limits_{x\to\overline{x}}(g\circ f)(x)=\lim\limits_{x\to\overline{x}} g(f(x))=L$.
- *Funciones continuas* : Si f es continua y $\overline{x}\in\mathrm{Dom}(f)\Rightarrow \lim\limits_{x\to\overline{x}} f(x)=f(\overline{x})$
- *Límites importantes* que deben manejar:

  - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. De aquí sale que: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$ y $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.
  - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$
  - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x)}{x-1}=1$.

Problemas:

P1. Calcule, en caso de existir, los siguientes límites de funciones.

(a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$.

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}$.

(c) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{|x|-2}$.

(d) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{|x^2-a^2|}{x-a}$.

(e) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+x+5}}{x}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} x\,|\cot(x)|-\dfrac{x}{|x|}$

(g) $\lim\limits_{x\to 1} x^{-\frac{x}{\ln(x)}}$.

(h) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$.

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(x)}{\ln(x+1)}$.

(j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^k}$, $k\in\{0,1,2\}$.

(k) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x}$

(l) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}[x]}{[x]}$

P2. (a) Sea $f(x) = \frac{1}{x}$. Calcule, en caso de existir: $\lim_{x\to 0} f(x)$, $\lim_{x\to 0} e^{f(x)}$ y $\lim_{x\to\pm\infty} e^{f(x)}$.

(b) Usando el teorema del sandwich, calcule:

(b1) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x}$. ¿Es posible calcularlo con álgebra de límites?

(b2) $\lim_{x\to\infty} x^\alpha e^{-x}$, $\alpha > 0$. Se proponen 2 esquemas para calcular este límite,

opción 1: recuerde que $e^{-x} = \left(e^{-\frac{x}{\alpha+1}}\right)^{\alpha+1}$.

opción 2: calcule el límite para $\alpha = \frac{1}{2}$ y extienda el resultado que se pide, usando el teorema de la composición (cambio de variable) en forma apropiada.

P3. Calcule, si es posible, los siguientes límites (puede serle útil el teorema de cambio de variable).

(a) $\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}$, $a \in \mathbb{R}$.

(b) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$.

(c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$, $a > 0$.

(d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{8^x - 7^x}{x}$, $b, c > 0$.

(e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2(5x) - \operatorname{sen}(3x^2)}{x^2}$.

(f) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{mx} - 1}{\operatorname{sen}(x^2)} \ln(1+2x)$.

(g) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\exp(x\ln x) - 1}{x-1}$.

(h) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^x + \cos(\pi x)}{\sqrt{x} - 1}$.

(i) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln(x)$

(j) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(a+x) + \operatorname{sen}(a-x) - 2\operatorname{sen}(a)}{x^2}$

(k) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (x - \frac{\pi}{2}) \tan x$

(l) $\lim_{x\to \pi} \dfrac{\operatorname{sen} x \cdot (1+\cos x)(1-\cos 2x)}{(e^x - e^\pi)\cdot \ln^4(\frac{x}{\pi})}$

P4. Encuentre asíntotas de todo tipo para las siguientes funciones.

(a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{9x^2 + x + 5}}{x}$. (*Indicación*: Puede usar P1(e))

(b) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^5 + 7x^3}}{\sqrt{x^3 - 4x}}$. (*Indicación*: Determine el dominio de la función)

(c) $h(x) = e^{\frac{1}{x}} \dfrac{(x-1)^2}{x-2}$.

(d) $\rho(x) = x\ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$.