

Auxiliar #7 MA1001 - Axioma del Supremo

Auxiliar: Nikolas Tapia, Profesor: Sebastián Donoso.

P1. Para los siguientes conjuntos, determine si tienen o no máximo, mínimo, supremo e ínfimo. En caso de existir indique sus valores.

(a) $(-1, 0) \cup (1, 2)$

(b) $\mathbb{Q} \cap (-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

(c) $\left\{1 - \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

P2. Sea A un conjunto acotado y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\beta \leq \alpha$.

(a) Pruebe que $\alpha = \sup A$ si y sólo si $x \leq \alpha$ para todo $x \in A$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $\alpha - \varepsilon < a$.

(b) Pruebe que $\beta = \inf A$ si y sólo si $\beta \leq x$ para todo $x \in A$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $a < \beta + \varepsilon$.

P3. Considere el conjunto $A = \left\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}_0\right\}$. Encuentre, si es que existen, todas las cotas superiores e inferiores de A , $\inf A$ y $\sup A$.

P4. Considere U y V dos subconjuntos de \mathbb{R} tales que

$$(\forall x \in U)(\forall y \in V) \quad x + y < 0.$$

Demuestre que $\sup U$ y $\sup V$ existen y

$$\sup U + \sup V \leq 0.$$

P5. Sean A y B dos subconjuntos no vacíos y acotados de \mathbb{R}_+^* . Se definen los conjuntos

$$P = \{xy : x \in A, y \in B\} \quad \text{y} \quad R = \{x^{-1} : x \in A\}.$$

Demuestre que $\sup P = \sup A \cdot \sup B$ y que si $\inf A > 0$ entonces

$$\sup R = \frac{1}{\inf A}.$$