

Auxiliar #4 MA1001 - Funciones

Auxiliar: Nikolas Tapia, Profesor: Sebastián Donoso.

P1. Estudie completamente la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{x}{|x| + 1}.$$

Indique dominio, ceros, paridad, crecimiento, acotamiento, asíntotas, conjunto imagen y gráfico aproximado. Además, encuentre la función inversa restringiendo apropiadamente el dominio y codominio si corresponde.

P2. Considere la fórmula $f(x) = \frac{|x|}{|1-|x||}$.

- Estudie dominio, paridad, signos, ceros y asíntotas horizontales y verticales.
- Indique las zonas de crecimiento y decrecimiento.
- Calcule $f((1, +\infty))$ y pruebe que

$$\begin{aligned} \tilde{f} : (1, +\infty) &\rightarrow f((1, +\infty)) \\ x &\mapsto \tilde{f}(x) = f(x) \end{aligned}$$

es biyectiva y determine su inversa.

P3. Considere la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|-1} & |x| > 1 \\ \lfloor x \rfloor \sqrt{1-x^2} & |x| \leq 1 \end{cases}$$

donde $\lfloor x \rfloor$ denota la parte entera de x .

- Estudie el crecimiento de f por separado en los intervalos $[-1, 0)$ y $[0, 1]$.
- Estudie el crecimiento de f por separado en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$.
- Demuestre que $f(x) > 1$ si $x \in (1, +\infty)$.
- Encuentre las asíntotas verticales y horizontales de f .
- Indique paridad, ceros e inyectividad de f .
- Usando lo anterior, calcule la imagen de f y gráfiquela indicando los puntos importantes.

P4. Si $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ entonces f satisface $f(x+y) = f(x) + f(y)$ y $f(xy) = f(x)f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Suponga ahora que f es una función que satisface estas dos propiedades pero que $f(x)$ no es siempre cero. El objetivo es demostrar que necesariamente $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Para esto, haga lo siguiente:

- Pruebe que $f(1) = 1$.
- Muestre que $f(x) = x$ si $x \in \mathbb{Q}$.
- Demuestre que $f(x) > 0$ si $x > 0$.
- Pruebe que f es creciente.
- Concluya que $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Indicación: Use que entre cualquier par de números, se puede encontrar un número racional.