

Auxiliar #3 MA1001 - Geometría Analítica

Auxiliar: Nikolas Tapia, Profesor: Sebastián Donoso.

P1. Sean los puntos $A = (a, 0)$ y $B = (-a, 0)$, con $a > 0$. Encuentre el Lugar Geométrico de los puntos $P = (x_0, y_0)$ tales que las pendientes de las rectas L_{PA} y L_{PB} satisfacen la relación

$$m_{PA} = \frac{2m_{PB}}{1 - m_{PB}^2}.$$

P2. Considere la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Se sabe que en un punto cualquiera (x_0, y_0) de ella, la recta tangente tiene ecuación $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.

- (a) Escriba la ecuación de la recta normal a la elipse por el punto (x_0, y_0) .
- (b) Pruebe que la recta $y = mx + n$ intersecta a la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ si y sólo si $(1 + m^2)r^2 \geq n^2$.
- (c) Use las partes anteriores para encontrar el menor radio del círculo centrado en el origen, que intersecta a la recta normal a la elipse por (x_0, y_0) .

P3. Considere la parábola de ecuación $y = x^2$ y el punto A de coordenadas $(1, 0)$. Si por el punto A se traza una recta L de pendiente $m \in \mathbb{R}$, se pide lo siguiente

- (a) Determine el conjunto C de todas las pendientes m tales que la recta L y la parábola se intersecten en al menos un punto.
- (b) Si $m \in C$, sean P y Q los puntos donde la recta y la parábola se intersectan y M el punto medio del trazo $\overline{PQ}$. Determine las coordenadas (x_M, y_M) de M en términos de m .
- (c) De las ecuaciones anteriores encuentre en qué curva se mueve el punto M . Además, considerando que $C \neq \mathbb{R}$, determine cuál zona de esta curva es realmente recorrida por M .

P4. Considere la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, donde $0 < b < a$ y su punto superior $A = (0, b)$. Por un punto $P = (x_0, y_0)$, con $x_0 \neq 0$, que se mueve sobre la elipse se traza la recta L_{AP} la que corta el eje OX en un punto Q . Determine el Lugar Geométrico de la intersección de la recta OP con la recta vertical por Q .