IN7K2-1 Optimizacin bajo Incertidumbre - Otoño 2012	13 de abril 2012

Auxiliar 2-Pauta

Profesores: Daniel Espinoza, Fernando Ordoñez — *Auxiliar: Renaud Chicoisne*

2010 Control 1 Pregunta 2

Considere el siguiente problema de optimización estocástica:

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \quad & x - y_1 - 6y_2 \\ \text{s.t.} \quad & T_1 x - 5y_1 - 2y_2 = d_1 \\ & T_2 x + y_1 - 3y_2 = d_2 \\ & x, y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

en donde $T = (T_1, T_2)$ y $d = (d_1, d_2)$ son inciertos y toman valores de acuerdo a los siguientes escenarios equiprobables: escenario 1: $T = (1, 1)$ y $d = (2, 1)$; escenario 2: $T = (2, 1)$ y $d = (-1, 0)$. La variable x se selecciona a-priori y las variables y_1, y_2 se ajustan a la incertidumbre.

1. Escriba el problema maestro y los subproblemas utilizados en el método de Benders para este problema.

   Solución:

   Incorporando la información de los escenarios que tenemos, se debe resolver el siguiente programa lineal:

$$\begin{aligned} \min_{x,y^s} \quad & x - \tfrac{1}{2} \sum_{s=1}^{2} (y_1^s + 6y_2^s) \\ \text{s.t.} \quad & T_1^s x - 5y_1^s - 2y_2^s = d_1^s \\ & T_2^s x + y_1^s - 3y_2^s = d_2^s \\ & x, y_1^s, y_2^s \geq 0 \end{aligned}$$

   El problema maestro es:

$$\begin{aligned} \min_{x,\gamma} \quad & x + \tfrac{1}{2} \sum_{s=1}^{2} \gamma_s \\ \text{s.t.} \quad & \gamma_s \geqslant Q_s(x) \\ & x, \gamma_s \geq 0 \end{aligned}$$

   Y el sub problema para cada escenario $s = 1, 2$ es:

$$\begin{aligned} Q_s(x) = \quad \min_{y^s} \quad & -y_1^s - 6y_2^s \\ \text{s.t.} \quad & T_1^s x - 5y_1^s - 2y_2^s = d_1^s \\ & T_2^s x + y_1^s - 3y_2^s = d_2^s \\ & y_1^s, y_2^s \geq 0 \end{aligned}$$

Cuyo dual se puede escribir:

$$\begin{aligned} Q_s(x) = \quad \max_{\pi^s} \quad & \sum_{i=1}^{2}(d_i^s - T_i^s x)\pi_i^s \\ \text{s.t.} \quad & -5\pi_1^s + \pi_2^s \leqslant -1 \\ & -2\pi_1^s - 3\pi_2^s \leqslant -6 \end{aligned}$$

2. Comenzando con el problema maestro sin restricciones de factibilidad ni optimalidad, realice una iteración de Benders en la que agrega cortes de todos los subproblemas (si corresponde). Resuelva los problemas de optimización gráficamente.

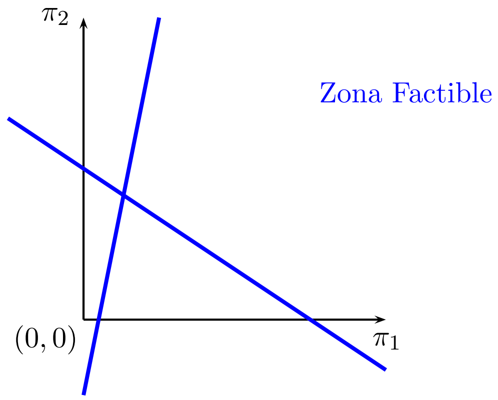
   Solución:

$$\begin{aligned} \min_{x,\gamma} \quad & x + \tfrac{1}{2}\sum_{s=1}^{2}\gamma_s \\ \text{s.t.} \quad & x \geq 0 \end{aligned}$$

$(x^*, \gamma_1^*, \gamma_2^*) = (0, -\infty, -\infty)$ es una solución óptima para este problema.

Las soluciones óptimas de los subproblemas son:

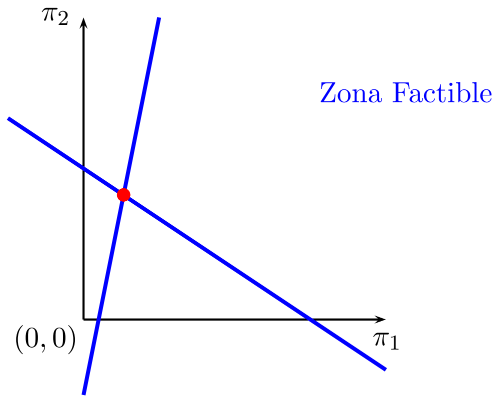
$$\begin{aligned} Q_1(0) = \quad \max_{\pi^1} \quad & (2 - 1 \cdot 0)\pi_1^1 + (1 - 1 \cdot 0)\pi_2^1 \\ \text{s.t.} \quad & -5\pi_1^1 + \pi_2^1 \leqslant -1 \\ & -2\pi_1^1 - 3\pi_2^1 \leqslant -6 \end{aligned}$$



$\Rightarrow (\pi_1^1, \pi_2^1) = (+\infty, +\infty)$

Por lo tanto este subproblema (el primal) es infactible y vamos a tener que agregar un corte de factibilidad al problema maestro.

$$
\begin{aligned}
Q_2(0) = \quad & \max_{\pi^2} \quad (-1-2\cdot 0)\pi_1^2 + (0-1\cdot 0)\pi_2^2 \\
& \text{s.t.} \qquad\quad -5\pi_1^2 + \pi_2^2 \leqslant -1 \\
& \qquad\qquad\quad -2\pi_1^2 - 3\pi_2^2 \leqslant -6
\end{aligned}
$$



$\Rightarrow (\pi_1^1, \pi_2^1) = (\frac{9}{17}, \frac{28}{17}) \Rightarrow Q_2(0) = \frac{9}{17} > \gamma_2 = -\infty$

Por lo tanto vamos a tener que agregar un corte de optimalidad al problema maestro.

Los dos subproblemas tienen los mismos áreas factibles por lo tanto los mismos puntos y rayos extremos:

$$
\begin{aligned}
z &= (\tfrac{9}{17}, \tfrac{28}{17}) \\
w^1 &= (1, 5) \\
w^2 &= (3, -2)
\end{aligned}
$$

El subproblema $s = 1$ es infactible por lo tanto se puede agregar al maestro las siguientes restricciones de rayos extremos:

$$
\begin{gathered}
(2-x)w_1^k + (1-x)w_2^k \leqslant 0,\ k = 1, 2 \\
\text{ie:} \\
6x \geqslant 7 \\
x \geqslant 4
\end{gathered}
$$

El subproblema $s = 2$ es subóptimo por lo tanto hay que agregar al maestro la siguiente restricción de punto extremo:

$$
\begin{gathered}
(-1-2x)z_1 - xz_2 \leqslant \gamma_2 \\
\text{ie: } -9 - 46x \leqslant 17\gamma_2
\end{gathered}
$$

3. Indique como queda el problema maestro reducido y que cotas a la función objetivo se obtuvieron despues de esta iteración.

   Solución:

   El problema maestro reducido es:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x,\gamma_s} & x + \frac{1}{2}\sum\limits_{s=1}^{2}\gamma_s \\ \text{s.t.} & x \geqslant 4 \\ & -9 - 46x \leqslant 17\gamma_2 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

   Cuyo óptimo es claramente $(x^*, \gamma_1^*, \gamma_2^*) = (4, -\infty, -11-\frac{6}{17})$, que da un valor objetivo para el problema maestro de $-\infty$

   Dado que el problema maestro es una relajación del problema completo, su valor óptimo es una cota inferior al valor óptimo del problema original, mientras una solución factible entrega una cota superior:

$$-\infty = x^* + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{2}\gamma_s^* \leqslant Z^* \leqslant x^* + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{2}Q_s(x^*) = +\infty$$

2010 Control 2 P1

Considere el siguiente problema con incertidumbre multietapas:

$$\begin{array}{ll} \max & c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \\ \text{s.a.} & w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 + w_4x_4 \leq K \\ & 0 \leq x_i \leq 1 \end{array}$$

donde los $w_i \geq 0$, $i = 2, 3, 4$ son inciertos y se debe decidir si tomar item i sin saber aún los pesos de los items $i + 1, \ldots, 4$. Suponga los siguientes parametros:

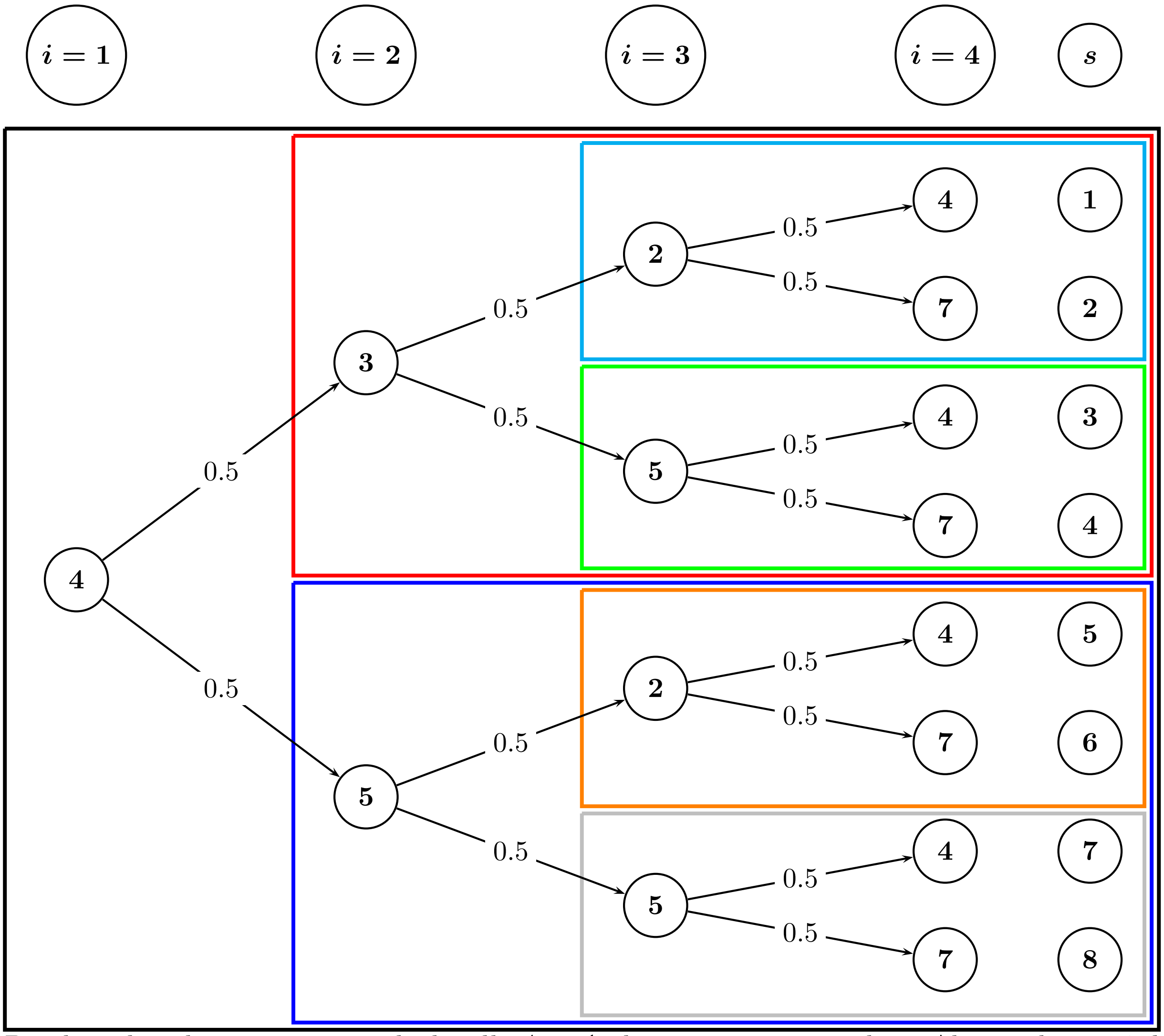
i	1	2	3	4
c_i	6	5	5	9
w_i	4	{3,5}	{2,5}	{4,7}
$\mathbb{P}$	1	{0.5, 0.5}	{0.5, 0.5}	{0.5, 0.5}

Si el algoritmo de progressive hedging obtiene las siguientes soluciones para los 8 escenarios equiprobables, determine la solución no anticipativa que se utilizará en la siguiente iteración del algoritmo.

Escenario (s)	$Pesos(w_i)$	Solución $x_i(s)$
1	(4,3,2,4)	(1/4, 1, 1, 1)
2	(4,3,2,7)	(1, 1, 1, 1/7)
3	(4,3,5,4)	(3/4, 1, 0, 1)
4	(4,3,5,7)	(1, 1, 0, 3/7)
5	(4,5,2,4)	(1, 0, 1, 1)
6	(4,5,2,7)	(1, 0, 1, 4/7)
7	(4,5,5,4)	(1, 1/5, 1/5, 1)
8	(4,5,5,7)	(1, 0, 0, 6/7)

Solución:

El árbol de los escenarios tiene la siguiente forma:



Donde cada color representa cada *bundle* $A \in \mathcal{A}_i$ durante cierto periodo i. Al periodo $i = 4$, los bundles son los singletones $\{s\}$.

Durante la siguiente iteración, la solución no anticipativa se calcula de la siguiente manera:

$$x_i(A) = \frac{1}{\sum\limits_{s\in A} p_s} \sum_{s\in A} p_s x_i(s), \forall i \in \{1,2,3,4\}, \forall A \in \mathcal{A}_i$$
$$\hat{x}_i(s) = x_i(A), \forall s \in A$$

Con $p_s = 0.5^3 = 1/8$ para cualquier escenario s.

Por lo tanto tenemos los siguientes *bundles*:

- negro: todos los escenarios. Pertenece a $\mathcal{A}_1$.
- rojo: $s \in \{1,2,3,4\}$. Pertenece a $\mathcal{A}_2$.
- azul oscuro: . $s \in \{5,6,7,8\}$. Pertenece a $\mathcal{A}_2$.
- azul claro: $s \in \{1,2\}$. Pertenece a $\mathcal{A}_3$.
- verde: $s \in \{3,4\}$. Pertenece a $\mathcal{A}_3$.
- naranjo: $s \in \{5,6\}$. Pertenece a $\mathcal{A}_3$.
- plomo: $s \in \{7,8\}$. Pertenece a $\mathcal{A}_3$.
- cada hoja del arbol de escenarios: Singletones $\{s\}$. Pertenecen a $\mathcal{A}_4$.

Entonces:

- $x_1(negro) = \frac{1}{\sum\limits_{s=1}^{8} p_s} \sum\limits_{s=1}^{8} p_s x_1(s)$

$$\text{ie: } x_1(negro) = \tfrac{1}{8}(\tfrac{1}{4} + 1 + \tfrac{3}{4} + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) = \tfrac{7}{8}$$

- $x_2(rojo) = \frac{1}{\sum\limits_{s=1}^{4} p_s} \sum\limits_{s=1}^{4} p_s x_2(s)$

$$\text{ie: } x_2(rojo) = \tfrac{1}{4}(1 + 1 + 1 + 1) = 1$$

- $x_2(azul\ oscuro) = \frac{1}{\sum\limits_{s=5}^{8} p_s} \sum\limits_{s=5}^{8} p_s x_2(s)$

$$\text{ie: } x_2(azul\ oscuro) = \tfrac{1}{4}(0 + 0 + \tfrac{1}{5} + 0) = \tfrac{1}{20}$$

- $x_3(azul\ claro) = \frac{1}{\sum\limits_{s=1}^{2} p_s} \sum\limits_{s=1}^{2} p_s x_3(s)$

$$\text{ie: } x_3(azul\ claro) = \tfrac{1}{2}(1+1) = 1$$

- $x_3(verde) = \frac{1}{\sum\limits_{s=3}^{4} p_s} \sum\limits_{s=3}^{4} p_s x_3(s)$

$$\text{ie: } x_3(verde) = \tfrac{1}{2}(0+0) = 0$$

- $x_3(naranjo) = \frac{1}{\sum\limits_{s=5}^{6} p_s} \sum\limits_{s=5}^{6} p_s x_3(s)$

$$\text{ie: } x_3(naranjo) = \tfrac{1}{2}(1+1) = 1$$

- $x_3(plomo) = \frac{1}{\sum\limits_{s=7}^{8} p_s} \sum\limits_{s=7}^{8} p_s x_3(s)$

$$\text{ie: } x_3(plomo) = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{5}+0) = \tfrac{1}{10}$$

- $x_4(s) = \frac{1}{p_2} p_2 x_4(2)$, ie:

$$\begin{aligned}
x_4(s=1) &= 1\\
x_4(s=2) &= \tfrac{1}{7}\\
x_4(s=3) &= 1\\
x_4(s=4) &= \tfrac{3}{7}\\
x_4(s=5) &= 1\\
x_4(s=6) &= \tfrac{4}{7}\\
x_4(s=7) &= 1\\
x_4(s=8) &= \tfrac{6}{7}
\end{aligned}$$

Entonces la solución non anticipativa $\hat{x}$ es:

s	$\hat{x}(s)$
1	$(\frac{7}{8}, 1, 1, 1)$
2	$(\frac{7}{8}, 1, 1, \frac{1}{7})$
3	$(\frac{7}{8}, 1, 0, 1)$
4	$(\frac{7}{8}, 1, 0, \frac{3}{7})$
5	$(\frac{7}{8}, \frac{1}{20}, 1, 1)$
6	$(\frac{7}{8}, \frac{1}{20}, 1, \frac{4}{7})$
7	$(\frac{7}{8}, \frac{1}{20}, \frac{1}{10}, 1)$
8	$(\frac{7}{8}, \frac{1}{20}, \frac{1}{10}, \frac{6}{7})$