DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesores: Fernando Ordoñez, Daniel Espinoza
Auxiliar: Renaud Chicoisne
Semestre: Otoño 2012

IN7K2 Optimización bajo Incertidumbre

Control N^{o}1

P1

Considere el problema de optimización de portafolio

$$(P_\alpha) \qquad \begin{array}{rll} \vartheta = & \min & f(x) = \mathbb{V}ar(\mathbf{r}^T x) \\ & \text{s.t.} & g(x) = \mathbb{E}(\mathbf{r}^T x) \geq \alpha \\ & & \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1 \\ & & x \in \mathbb{R}^n_+ \end{array} \tag{1}$$

donde x_i corresponde la fracción de la riqueza que se invierte en el activo i que tiene rentabilidad r_i, para $i = 1, \dots n$. Suponemos ademas que las rentabilidades futuras $\mathbf{r} \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$, pero de parámetros μ, Σ desconocidos. Asuma que, sin embargo, es posible generar muestras iid de cualquier tamaño para $\mathbf{r}$.

1. Escriba una versión sampleada $(\hat{P}_{N,\alpha})$ del problema (1), y demuestre (invocando alguno de los teoremas visto en clases) que $\hat{\vartheta}_N \xrightarrow[N \to \infty]{} \vartheta$.
   Solución:

   Una versión sampleada puede ser formulada como sigue:

$$(\hat{P}_{N,\alpha}) \qquad \begin{array}{rll} \hat{\vartheta}_N = & \min & \hat{f}_N(x) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} \left(x^\top r^i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} x^\top r^j \right)^2 \\ & \text{s.t.} & \hat{g}_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x^\top r^i \geq \alpha \\ & & e^\top x \leq 1 \\ & & x \in \mathbb{R}^n_+ \end{array} \tag{2}$$

   (a) Si supongamos que (P_α) es factible, entonces podemos asumir que el conjunto S de soluciones óptimas de (P_α) es no vacío.
   (b) X es acotado dado que $x_i \in [0,1], \forall i = 1, ..., n$.
   (c) Mostramos que X es cerrado. Sea $x^p \in X^{\mathbb{N}}$ tal que $\exists x \in \mathbb{R}^n : x^p \xrightarrow[p \to +\infty]{} x$. Mostremos que $x \in X$. Tenemos:

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{r}^\top x_p\right] - \mathbb{E}\left[\mathbf{r}^\top x\right] \geqslant \alpha - \mathbb{E}\left[\mathbf{r}^\top x\right]$$

Por continuidad de $g : x \longmapsto \mathbb{E}\left[\mathbf{r}^\top x\right]$ y porque $x^p \underset{p\to+\infty}{\longmapsto} x$ obtenemos:

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{r}^\top x_p\right] - \mathbb{E}\left[\mathbf{r}^\top x\right] \underset{p\to+\infty}{\longmapsto} 0$$
$$\Rightarrow \mathbb{E}\left[\mathbf{r}^\top x\right] \geqslant \alpha$$

De manera trivial tenemos tambien que:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant 1$$

Por lo tanto, cualquier serie convergente de elementos de X tiene su limite en X tambien,

ie: X es cerrado.

(d) De los dos puntos anteriores se deduce que X es compacto.

(e) Por lo tanto $\hat{f}_N$ converge uniformemente a f sobre X.

(f) f es continua a valores reales sobre X.

(g) El dominio determinista de X es compacto, y supusimos que $X \neq \emptyset$, por lo tanto $\vartheta > -\infty$ y entonces $S \neq \emptyset$.

(h) $\hat{S}_N$ está incluido en su dominio determinista que es compacto.

(i) Supongamos P_α estrictamente factible, ie:

$$\exists \bar{x} \in X : \mathbb{E}\left[\mathbf{r}\bar{x}\right] > \alpha$$
$$\text{ie: } \exists \bar{x} \in X : \mathbb{E}\left[\mathbf{r}\bar{x}\right] \geqslant \alpha + \varepsilon \text{ con } \varepsilon > 0$$

Para N suficientemente grande sabemos que:

$$\mathbb{P}\left[g(\bar{x}) \leqslant \hat{g}_N(\bar{x}) + z_\beta \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\hat{f}_N(\bar{x})}\right] \geqslant 1 - \beta$$
$$\Rightarrow \mathbb{P}\left[\alpha + \varepsilon - z_\beta \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\hat{f}_N(\bar{x})} \leqslant \hat{g}_N(\bar{x})\right] \geqslant 1 - \beta$$

Sea N suficientemente grande para que:

$$\varepsilon \geqslant z_\beta \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\hat{f}_N(\bar{x})}$$

Entonces:

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left[\alpha \leqslant \hat{g}_N(\bar{x})\right] \geqslant 1 - \beta$$

Por lo tanto con alta probabilidad $X_N \neq \emptyset$, entonces $\hat{S}_N \neq \emptyset$.

(j) Demostramos que cualquier serie convergente $x_N \in X_N$ tiene su limite $x \in X$. Tenemos:

$$\begin{aligned} \alpha - g(x) &\leqslant g_N(x_N) - g(x) \\ &\leqslant |g_N(x_N) - g(x)| \\ &\leqslant |g(x) - g(x_N)| + |g(x_N) - g_N(x_N)| \end{aligned}$$

Además, sabemos que g es continua sobre $\mathbb{R}^n$ y que $x_N \underset{N\to+\infty}{\longmapsto} x$ casi seguramente, por lo tanto:

$$|g(x) - g(x_N)| \underset{N\to+\infty}{\longmapsto} 0$$

Por la Ley de los Grandes Números sabemos que $\hat{g}_N$ converge a g uniformemente en una vecindad de x, por lo tanto existe una esfera centrada en x y de rayo $\mu > 0$ tal que $\hat{g}_N$ converge a g uniformemente en $\mathscr{B}(x,\mu)$.

Además:

$$\begin{gathered} x_N \underset{N\to+\infty}{\longmapsto} x \text{ casi seguramente} \\ \text{ie: } \forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon : \forall N > N_\varepsilon, |x_N - x| \leqslant \varepsilon \\ \Rightarrow \exists N_\mu : \forall N > N_\mu, |x_N - x| \leqslant \mu \\ \text{ie: } \exists N_\mu : \forall N > N_\mu, x \in \mathscr{B}(x,\mu) \end{gathered}$$

Por lo tanto:

$$|g(x_N) - g_N(x_N)| \underset{N\to+\infty}{\longmapsto} 0$$

En consecuencia:

$$\begin{gathered} g(x) \geqslant \alpha \\ \text{ie: } x \in X \end{gathered}$$

El teorema 5.5 nos asegura entonces que:

$$\hat{\vartheta}_N \xrightarrow[N\to\infty]{} \vartheta$$

2. Asumiendo que para todo punto factible $x \in X$, hay una secuencia de puntos $x_N \in X_N$ factibles para $(\hat{P}_{N,\alpha})$ tal que $x_N \xrightarrow[N\to\infty]{} x$ con probabilidad uno, y sabiendo que (por definición) $\hat{\vartheta}_N \leq \hat{f}_N(x_N), \forall x_N \in X_N$ demuestre que

$$\limsup_{N\to\infty} \hat{\vartheta}_N \leq \vartheta$$

Solución:
Por definición tenemos:

$$\hat{\vartheta}_N \leq \hat{f}_N(x_N), \forall x_N \in X_N$$

Entonces cuando $N \to +\infty$:

$$\limsup_{N\to\infty} \hat{\vartheta}_N \leq \lim_{N\to\infty} \hat{f}_N(x_N)$$

Y tenemos convergencia uniforme de $\hat{f}_N$ a f, convergencia casi segura de x_N a x, y continuidad de $f(\cdot)$, por lo tanto tenemos:

$$\begin{gathered} \lim_{N\to\infty} \hat{f}_N(x_N) = f(x) \\ \Rightarrow \limsup_{N\to\infty} \hat{\vartheta}_N \leq f(x) \end{gathered}$$

En particular para $x = \arg\min_{x'\in X} f(x')$

$$\limsup_{N\to\infty} \hat{\vartheta}_N \leq \vartheta$$

3. Construya un intervalo de confianza (i.e. cotas superiores e inferiores) que contenga ϑ con alta probabilidad, dependiendo del resultado de k repeticiones independientes del experimento $(\hat{P}_{N,\alpha})$, y asumiendo que conoce una muestra independiente $\{r^i\}_{i=1}^{N'}$ para algún $N' >> N$. ¿Puede ocurrir que la cota superior resultante sea ∞?

Solución:

(a) Primero sabemos que:

$$\vartheta \geqslant \mathbb{E}[\hat{\vartheta}_N]$$

Podemos estimar $\mathbb{E}[\hat{\vartheta}_N]$ como el promedio de todos los valores óptimos obtenidos con los k experimentos efectuados:

$$\hat{u}_{N,k} = \tfrac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \hat{\vartheta}_N^i$$

es un estimador insesgado de $\mathbb{E}[\hat{\vartheta}_N]$. Además, por independencia de los experimentos tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}ar[\hat{u}_{N,k}] = \hat{\sigma}^2_{N,k} &= \tfrac{1}{k}\mathbb{V}ar[\hat{\vartheta}_N] \\ &= \tfrac{1}{k(k-1)}\sum_{i=1}^{k}\left(\hat{\vartheta}_N^i - \hat{u}_{N,k}\right)^2 \end{aligned}$$

El teorema central limite nos dice que $\hat{u}_{N,k}$ se vuelve aproximadamente normal con k grande. Por lo tanto se puede ocupar:

$$L_{N,k} = \hat{u}_{N,k} - t_{\varepsilon,k-1}\hat{\sigma}_{N,k}$$

Como cota inferior de $\mathbb{E}[\hat{\vartheta}_N]$ con nivel de confianza $(1-\varepsilon)$. Con $t_{\varepsilon,k-1}$ el ε-valor crítico de una t-distribución con $k-1$ grados de libertad. Por lo tanto:

$$\mathbb{P}\left[\hat{u}_{N,k} - t_{\varepsilon,k-1}\hat{\sigma}_{N,k} \leqslant \vartheta\right] \geqslant 1-\varepsilon$$

(b) Sea $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.
Si $\bar{x} \in X$ sabemos que:

$$\vartheta \leqslant f(\bar{x})$$

Uno puede estimar la varianza de $\hat{f}_{N'}(\bar{x})$ por el estimador:

$$\hat{\sigma}^2_{N'} = \tfrac{1}{N'(N'-1)}\sum_{i=1}^{N'}\left(\bar{x}^\top r^i - \hat{f}_{N'}(\bar{x})\right)^2$$

El teorema central limite nos dice que $\hat{f}_{N'}(\bar{x})$ se vuelve aproximadamente normal con N' grande. Por lo tanto se puede ocupar:

$$U_{N'}(\bar{x}) = \hat{f}_{N'}(\bar{x}) + z_\varepsilon \hat{\sigma}_{N'}(\bar{x})$$

Como cota superior de $f(\bar{x})$ con nivel de confianza $(1-\varepsilon)$. Con z_ε el ε-valor crítico de una distribución normal. Por lo tanto:

$$\mathbb{P}\left[\hat{f}_{N'}(\bar{x}) + z_\varepsilon\hat{\sigma}_{N'}(\bar{x}) \leqslant f(\bar{x})\right] \geqslant 1-\varepsilon$$

Ahora, este resultado vale solamente para $\bar{x} \in X$. Queremos encontrar con que probabilidad $\bar{x}$ es factible para (P_α). Primero sabemos que:

$$\mathbb{E}\left[\hat{g}_N(\bar{x})\right] = g(\bar{x})$$

Sea $\widetilde{u}_{N,k}(\bar{x})$ un estimador de la media de $\hat{g}_N(\bar{x})$:

$$\widetilde{u}_{N,k}(\bar{x}) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\hat{g}_{N,i}(\bar{x})$$

Sea $\widetilde{\sigma}^2_{N,k}$ un estimador de la varianza de $\hat{g}_N(\bar{x})$:

$$\widetilde{\sigma}^2_{N,k}(\bar{x}) = \frac{1}{k(k-1)}\sum_{i=1}^{k}\left(\widetilde{u}_{N,k}(\bar{x}) - \hat{g}_{N,i}(\bar{x})\right)^2$$

El teorema central limite nos dice que $\hat{g}_N(\bar{x})$ se vuelve aproximadamente normal con N grande. Por lo tanto se puede ocupar:

$$\widetilde{L}_{N,k}(\bar{x}) = \widetilde{u}_{N,k}(\bar{x}) + t_{\beta,k-1}\widetilde{\sigma}_{N,k}(\bar{x})$$

Como cota inferior de $g(\bar{x})$ con nivel de confianza $(1-\beta)$. Con $t_{\beta,k-1}$ el β-valor crítico de una t-distribución con $k-1$ grados de libertad. Por lo tanto:

$$\mathbb{P}\left[\widetilde{u}_{N,k}(\bar{x}) + t_{\beta,k-1}\widetilde{\sigma}_{N,k}(\bar{x}) \leqslant g(\bar{x})\right] \geqslant 1-\beta$$

ie: si encontramos algún $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$\alpha \leqslant \widetilde{u}_{N,k}(\bar{x}) + t_{\beta,k-1}\widetilde{\sigma}_{N,k}(\bar{x})$$

Sabemos que:

$$U_{N'}(\bar{x}) = \hat{f}_{N'}(\bar{x}) + z_\varepsilon \hat{\sigma}_{N'}(\bar{x})$$

es cota superior de ϑ con probabilidad $(1-\varepsilon)(1-\beta)$.

En la practica, buscaríamos alguna solución óptima de alguno de los problemas sampleados por la cual averiguaríamos si $\widetilde{L}_{N,k}(\bar{x}) \geqslant \alpha$.

Si no existe un tal $\bar{x}$, la única cota que podemos tener es $+\infty$.

4. Suponga que conoce $\sigma \geq \mathbb{V}ar(\mathbf{r}^\top x)$ para todo x en el dominio determinista del problema (i.e. sin considerar la restriccion en esperanza), cual es el $\delta > 0$ mas pequeño que asegura que $\hat{x}^*_{N,\alpha+\delta}$ (i.e. la solución óptima de $(\hat{P}_{N,\alpha+\delta})$) sea factible para P_α con probabilidad al menos 95%. ¿Qué cotas superiores se pueden derivar del resultado anterior?

Solución:

Sabemos que :

$$\mathbb{E}\left[\hat{g}_N(x^*_{N,\alpha+\delta})\right] = g(x^*_{N,\alpha+\delta})$$

Por el teorema central límite uno puede estimar la varianza de $\mathbb{E}\left[\hat{g}_N(x^*_{N,\alpha+\delta})\right]$ con $\frac{1}{N}\hat{f}_N(x^*_{N,\alpha+\delta})$.

Por lo tanto una cota inferior con seguridad $(1-\beta)$ de $g(x^*_{N,\alpha+\delta})$ es:

$$\begin{aligned} L_N(x^*_{N,\alpha+\delta}) &= \hat{g}_N(x^*_{N,\alpha+\delta}) - \tfrac{1}{N}t_{\beta,N-1}\hat{f}_N(x^*_{N,\alpha+\delta}) \\ &= \hat{g}_N(x^*_{N,\alpha+\delta}) - \tfrac{1}{N}t_{\beta,N-1}\hat{\vartheta}_N \\ &\geqslant \alpha+\delta - \tfrac{1}{N}t_{\beta,N-1}\vartheta \\ &\geqslant \alpha+\delta - \tfrac{1}{N}t_{\beta,N-1}\sigma \end{aligned}$$

En consecuencia con seguridad $(1-\beta)$ tenemos:

$$g(x^*_{N,\alpha+\delta}) \geqslant L_N(x^*_{N,\alpha+\delta}) \geqslant \alpha+\delta-\tfrac{1}{N}t_{\beta,N-1}\sigma$$

Por lo tanto el δ más chico que podemos encontrar con esta mayoración tal que $x^*_{N,\alpha+\delta}$ sea factible para (P_α) con probabilidad al menos $(1-\beta)$ es:

$$\delta = \tfrac{1}{N}t_{\beta,N-1}\sigma$$

Tenemos:

$$\mathbb{P}\left[\hat{x}^*_{N,\alpha+\frac{1}{N}t_{\beta,N-1}\sigma} \in X\right] \geqslant 1-\beta$$

Por lo tanto:

$$\mathbb{P}\left[\vartheta \leqslant f\left(\hat{x}^*_{N,\alpha+\frac{1}{N}t_{\beta,N-1}\sigma}\right)\right] \geqslant 1-\beta$$

De la pregunta anterior, imponiendo $\bar{x} = \hat{x}^*_{N,\alpha+\frac{1}{N}t_{\beta,N-1}\sigma}$ se obtiene una cota superior con probabilidad al menos $(1-\varepsilon)(1-\beta)$.

P2

Considere el siguiente problema estocástico con $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & \frac{1}{2}x + \sum\limits_{i=1}^{S} p_i Q(x,\xi^i) \\ \text{s.t.} & 0 \leq x \leq 10 \end{array} \tag{3}$$

Supondremos que este problema tiene tres escenarios equiprobables con $\xi^1 = 1$, $\xi^2 = 2$, y $\xi^3 = 4$.

1. En el caso en que $Q(x,\xi) = |x-\xi|$, resuelva este problema usando el algoritmo de Benders. Para esto, indique la forma del subproblema de generación de cortes; escriba el maestro al comienzo de cada iteración; y los cortes generados. Resuelva los problemas lineales por inspección.
   Solución

   El problema maestro es:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{3} \gamma^i \\ \text{s.t.} & 0 \leq x \leq 10 \end{array}$$

   y cada subproblema esta representado por su valor óptimo

$$Q(x,\xi^i) = |x-\xi^i| = \begin{cases} x-\xi^i & \text{si } x \in [0,\xi^i] \\ \xi^i - x & \text{si } x \in [\xi^i, 10] \end{cases}$$

   Se puede representar $Q(x,\xi^i)$ como el mínimo de un problema de programación lineal:

$$\begin{array}{lll} Q(x,\xi^i) = & \min\limits_{y} & y \\ & \text{s.t.} & x-\xi^i \leqslant y \\ & & \xi^i - x \leqslant y \end{array}$$

   ie:

$$\begin{array}{lll} Q(x,\xi^i) = & \max\limits_{z} & z_1(x-\xi^i) + z_2(\xi^i - x) \\ & \text{s.t.} & z_1 + z_2 = 1 \\ & & z_1, z_2 \geqslant 0 \end{array}$$

   Iteración 1: La solución óptima del problema maestro es:

$$(\bar{x}, \bar{\gamma}^1, \bar{\gamma}^2, \bar{\gamma}^3) = (0, -\infty, -\infty, -\infty).$$

Cada subproblema entrega una solución óptima de valor:

$$Q(x=0,\xi^1=1)=1>\bar{\gamma}^1=-\infty \text{ .Con } z^1=(0,1)$$
$$Q(x=0,\xi^2=2)=2>\bar{\gamma}^2=-\infty \text{ .Con } z^2=(0,1)$$
$$Q(x=0,\xi^1=4)=4>\bar{\gamma}^3=-\infty \text{ .Con } z^3=(0,1)$$

Por lo tanto se tienen que agregar cortes de optimalidad para cada uno de los subproblemas:

$$z_1^i(x-\xi^i)+z_2^i(\xi^i-x)\leqslant\gamma^i,\ i=1,2,3$$

ie:

$$\begin{aligned}1-x&\leqslant\gamma^1\\2-x&\leqslant\gamma^2\\4-x&\leqslant\gamma^3\end{aligned}$$

Iteración 2: El problema maestro es:

$$\begin{array}{ll}\min\limits_{x} & \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{3}\gamma^i\\ \text{s.t.} & 0\le x\le 10\\ & 1-x\leqslant\gamma^1\\ & 2-x\leqslant\gamma^2\\ & 4-x\leqslant\gamma^3\end{array}$$

Cuya solución óptima es:

$$(\bar{x},\bar{\gamma}^1,\bar{\gamma}^2,\bar{\gamma}^3)=(10,-9,-8,-6).$$

Cada subproblema entrega una solución óptima de valor:

$$Q(x=10,\xi^1=1)=9>\bar{\gamma}^1=-9 \text{ .Con } z^1=(1,0)$$
$$Q(x=10,\xi^2=2)=8>\bar{\gamma}^2=-8 \text{ .Con } z^2=(1,0)$$
$$Q(x=10,\xi^1=4)=6>\bar{\gamma}^3=-6 \text{ .Con } z^3=(1,0)$$

Por lo tanto se tienen que agregar cortes de optimalidad para cada uno de los subproblemas:

$$z_1^i(x-\xi^i)+z_2^i(\xi^i-x)\leqslant\gamma^i,\ i=1,2,3$$

ie:

$$\begin{aligned}x-1&\leqslant\gamma^1\\x-2&\leqslant\gamma^2\\x-4&\leqslant\gamma^3\end{aligned}$$

Iteración 3: El problema maestro es:

$$\begin{array}{ll}\min\limits_{x} & \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{3}\gamma^i\\ \text{s.t.} & 0\le x\le 10\\ & 1-x\leqslant\gamma^1\\ & 2-x\leqslant\gamma^2\\ & 4-x\leqslant\gamma^3\\ & x-1\leqslant\gamma^1\\ & x-2\leqslant\gamma^2\\ & x-4\leqslant\gamma^3\end{array}$$

Cuya solución óptima es:

$$(\bar{x},\bar{\gamma}^1,\bar{\gamma}^2,\bar{\gamma}^3)=(1,0,1,3).$$

Cada subproblema entrega una solución óptima de valor:

$$Q(x=1,\xi^1=1)=0=\bar{\gamma}^1$$
$$Q(x=1,\xi^2=2)=1=\bar{\gamma}^2$$
$$Q(x=1,\xi^1=4)=3=\bar{\gamma}^3$$

Por lo tanto la solución actual es factible y óptima con $\bar{x}=1$.

2. En el caso en que $Q(x,\xi)=-x+\frac{1}{2}\xi x^2$, haga dos iteraciones del algoritmo de progressive hedging con $\rho=\frac{1}{2}$ y empezando con el multiplicador de lagrange $W^0=0$.

   Solución

   Aquí estamos aplicando el algoritmo de progressive hedging con un único periodo de tiempo.

   Inicialización: Sean los $x^0(s)$ las soluciones óptimas de:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & \frac{1}{2}x+Q(x,\xi^s) \\ \text{s.t.} & 0\leq x\leq 10 \end{array}$$

   ie: $x^0(1)=\frac{1}{2}$, $x^0(2)=\frac{1}{4}$, $x^0(3)=\frac{1}{8}$. Y empezamos con $W^0=0$.

   Iteración 1:

   Construyemos la solución no anticipativa $\hat{x}^0$derivada de x^0:

$$\hat{x}^0=\frac{1}{\sum\limits_{s\in S}p_s}\sum_{s\in S}p_s x^0(s)=\frac{7}{24}$$

   Resolvemos el siguiente problema para cada escenario:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & \frac{1}{2}x+Q(x,\xi^s)+x\cdot W^0(s)+\frac{\rho}{2}|x-\hat{x}^0(s)|^2 \\ \text{s.t.} & 0\leq x\leq 10 \end{array}$$

   Cuya solución óptima es $x^1(s)$. ie:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & \frac{1}{2}x-x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}|x-\frac{7}{24}|^2 \\ \text{s.t.} & 0\leq x\leq 10 \end{array}$$

   Cuya solución óptima es $x^1(1)=\frac{31}{72}$.

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & \frac{1}{2}x-x+\frac{1}{2}2x^2+\frac{1}{4}|x-\frac{7}{24}|^2 \\ \text{s.t.} & 0\leq x\leq 10 \end{array}$$

   Cuya solución óptima es $x^1(2)=\frac{31}{120}$.

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & \frac{1}{2}x-x+\frac{1}{2}4x^2+\frac{1}{4}|x-\frac{7}{24}|^2 \\ \text{s.t.} & 0\leq x\leq 10 \end{array}$$

   Cuya solución óptima es $x^1(3)=\frac{31}{216}$.

   Actualizamos el (los) multiplicadores:

$$W^1=W^0+\rho Kx^1$$

   Con:

$$W^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$x^1 = \begin{bmatrix} \frac{31}{72} \\ \frac{31}{120} \\ \frac{31}{216} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$W^1 = \begin{bmatrix} \frac{1147}{15120} \\ -\frac{31}{3240} \\ -\frac{217}{3240} \end{bmatrix}$$

Iteración 2:
Construyemos la solución no anticipativa $\hat{x}^1$derivada de x^1:

$$\hat{x}^1(s) = \frac{1}{\sum\limits_{s' \in S} p_{s'}} \sum\limits_{s' \in S} p_{s'} x^1(s') = \frac{899}{3240}$$

Resolvemos el siguiente problema para cada escenario:

$$\begin{array}{ll} \min_x & \frac{1}{2}x + Q(x, \xi^s) + x \cdot W^1(s) + \frac{\rho}{2}|x - \hat{x}^1(s)|^2 \\ \text{s.t.} & 0 \leq x \leq 10 \end{array}$$

Cuya solución óptima es $x^2(s)$. i.e.:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_x & \frac{1}{2}x - x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1147}{15120}x + \frac{1}{4}|x - \frac{31}{72}|^2 \\ \text{s.t.} & 0 \leq x \leq 10 \end{array}$$

Cuya solución óptima es $x^2(1) = \frac{2417}{5670}$.

$$\begin{array}{ll} \min\limits_x & \frac{1}{2}x - x + \frac{1}{2}2x^2 - \frac{31}{3240}x + \frac{1}{4}|x - \frac{31}{120}|^2 \\ \text{s.t.} & 0 \leq x \leq 10 \end{array}$$

Cuya solución óptima es $x^2(2) = \frac{4139}{16200}$.

$$\begin{array}{ll} \min\limits_x & \frac{1}{2}x - x + \frac{1}{2}4x^2 - \frac{217}{3240}x + \frac{1}{4}|x - \frac{31}{216}|^2 \\ \text{s.t.} & 0 \leq x \leq 10 \end{array}$$

Cuya solución óptima es $x^2(3) = \frac{4139}{29160}$.

Actualizamos el (los) multiplicadores:

$$W^2 = W^1 + \rho K x^2$$

Con:

$$W^1 = \begin{bmatrix} \frac{1147}{15120} \\ -\frac{31}{3240} \\ -\frac{217}{3240} \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$x^2 = \begin{bmatrix} \frac{2417}{5670} \\ \frac{4139}{16200} \\ \frac{4139}{29160} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$W^2 = \begin{bmatrix} \frac{132719}{874800} \\ -\frac{64936813}{1653372000} \\ -\frac{816217}{6123600} \end{bmatrix}$$

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

Inicialización: Sean los $x^0(s)$ las soluciones óptimas de:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & \frac{1}{2}x + Q(x, \xi^s) \\ \text{s.t.} & 0 \leq x \leq 10 \end{array}$$

ie: $x^0(1) = \frac{1}{2}$, $x^0(2) = \frac{1}{4}$, $x^0(3) = \frac{1}{8}$. Y empezamos con $W^0 = 0$.
Iteración 1:
Construyemos la solución no anticipativa $\hat{x}^0$derivada de x^0:

$$\hat{x}^0 = \frac{1}{\sum\limits_{s \in S} p_s} \sum\limits_{s \in S} p_s x^0(s) = \frac{7}{24}$$

Resolvemos el siguiente problema para cada escenario:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & \frac{1}{2}x + Q(x, \xi^s) + x \cdot W^0(s) + \frac{\rho}{2}|x - \hat{x}^0(s)|^2 \\ \text{s.t.} & 0 \leq x \leq 10 \end{array}$$

Cuya solución óptima es $x^1(s)$. ie:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & \frac{1}{2}x - x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}|x - \frac{7}{24}|^2 \\ \text{s.t.} & 0 \leq x \leq 10 \end{array}$$

Cuya solución óptima es $x^1(1) = \frac{31}{72}$.

$$\begin{array}{ll}\min\limits_{x} & \frac{1}{2}x - x + \frac{1}{2}2x^2 + \frac{1}{4}|x - \frac{7}{24}|^2 \\ \text{s.t.} & 0 \leq x \leq 10\end{array}$$

Cuya solución óptima es $x^1(2) = \frac{31}{120}$.

$$\begin{array}{ll}\min\limits_{x} & \frac{1}{2}x - x + \frac{1}{2}4x^2 + \frac{1}{4}|x - \frac{7}{24}|^2 \\ \text{s.t.} & 0 \leq x \leq 10\end{array}$$

Cuya solución óptima es $x^1(3) = \frac{31}{216}$.

Actualizamos el (los) multiplicadores:

$$W^1 = W^0 + \rho K x^1$$

Con:

$$W^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$x^1 = \begin{bmatrix} \frac{31}{72} \\ \frac{31}{120} \\ \frac{31}{216} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$W^1 = \begin{bmatrix} \frac{1147}{15120} \\ -\frac{31}{3240} \\ -\frac{217}{3240} \end{bmatrix}$$

Iteración 2:

Construyemos la solución no anticipativa $\hat{x}^1$derivada de x^1:

$$\hat{x}^1(s) = \frac{1}{\sum\limits_{s' \in S} p_{s'}} \sum\limits_{s' \in S} p_{s'} x^1(s') = \frac{899}{3240}$$

Resolvemos el siguiente problema para cada escenario:

$$\begin{array}{ll}\min_x & \frac{1}{2}x + Q(x, \xi^s) + x \cdot W^1(s) + \frac{\rho}{2}|x - \hat{x}^1(s)|^2 \\ \text{s.t.} & 0 \leq x \leq 10\end{array}$$

Cuya solución óptima es $x^2(s)$. i.e.:

$$\begin{array}{ll}\min\limits_{x} & \frac{1}{2}x - x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1147}{15120}x + \frac{1}{4}|x - \frac{31}{72}|^2 \\ \text{s.t.} & 0 \leq x \leq 10\end{array}$$

Cuya solución óptima es $x^2(1) = \frac{2417}{5670}$.

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & \frac{1}{2}x - x + \frac{1}{2}2x^2 - \frac{31}{3240}x + \frac{1}{4}|x - \frac{31}{120}|^2 \\ \text{s.t.} & 0 \leq x \leq 10 \end{array}$$

Cuya solución óptima es $x^2(2) = \frac{4139}{16200}$.

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & \frac{1}{2}x - x + \frac{1}{2}4x^2 - \frac{217}{3240}x + \frac{1}{4}|x - \frac{31}{216}|^2 \\ \text{s.t.} & 0 \leq x \leq 10 \end{array}$$

Cuya solución óptima es $x^2(3) = \frac{4139}{29160}$.

Actualizamos el (los) multiplicadores:

$$W^2 = W^1 + \rho K x^2$$

Con:

$$W^1 = \begin{bmatrix} \frac{1147}{15120} \\ -\frac{31}{3240} \\ -\frac{217}{3240} \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$x^2 = \begin{bmatrix} \frac{2417}{5670} \\ \frac{4139}{16200} \\ \frac{4139}{29160} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$W^2 = \begin{bmatrix} \frac{132719}{874800} \\ -\frac{64936813}{1653372000} \\ -\frac{816217}{6123600} \end{bmatrix}$$

3. En el caso en que $Q(x,\xi) = -x + \frac{1}{2}\xi x^2$, haga dos iteraciones del stochastic approximation algorithm. Suponga que el sampleo de la incertidumbre le entrega la siguiente sequencia de escenarios: 2, 3, 1, 1, 3, 2, 2, 1, 2, 3, 3.

Solución

Partiendo de una solución factible $x^0 = 0$ cada iteración del SAAlg se hace de la forma siguiente:

$$x^{j+1} = \Pi_X(x^j - \gamma^j G(x^j, \xi^j))$$

Con:

- $X := \{x \in \mathbb{R} : 0 \leqslant x \leqslant 10\}$.
- Π el operador de projección sobre X.
- $G(x,\xi) = \xi x - \frac{1}{2}$, que pertenece a $\partial[\frac{x}{2} + Q(x,\xi)]$

Por lo tanto el iterado x^{j+1} es la solución óptima del siguiente problema:

$$\min_{x\in[0,10]} \left| x - \left(x^j - \gamma^j \left(\xi^j x^j - \frac{1}{2} \right) \right) \right|$$

Suponemos $\gamma^j = \frac{1}{4(j+1)}$
Iteración 1: $x^0 = 0$, $\gamma^0 = \frac{1}{4}$, y elijamos $\xi^1 = 2$. Por lo tanto x^1 es la solución óptima de:

$$\min_{x\in[0,10]} \left| x - \left(0 - \frac{1}{4} \left(2 \cdot 0 - \frac{1}{2} \right) \right) \right|$$

$\Rightarrow x^1 = \frac{1}{8}$
Iteración 2: $x^1 = \frac{1}{8}$, $\gamma^1 = \frac{1}{8}$, y elijamos $\xi^2 = 3$. Por lo tanto x^2 es la solución óptima de:

$$\min_{x\in[0,10]} \left| x - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8} \left(3 \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \right) \right) \right|$$

$\Rightarrow x^2 = \frac{7}{64}$