IN7K2-1 Optimizacin bajo Incertidumbre - Otoño 2012 17 de abril 2012

Auxiliar 3-Pauta

Profesores: Daniel Espinoza, Fernando Ordoñez *Auxiliar: Renaud Chicoisne*

Pregunta 1 (5.1 SPBook)

Considere el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & f(x) = \mathbb{E}[F(x,w)] \\ \text{s.t:} \quad & \\ & x \in X := \{x \in X_0 : g_i(x) \leqslant 0, i = 1, ..., p\} \end{aligned}$$

Con:

- $X_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ cerrado , $X_0 \neq \emptyset$
- $g_i(x) := \mathbb{E}\left[G_i(x,\xi)\right], i = 1, ..., p$
- $G_i(x,\xi), i = 1, ..., p$ funciones random lower semi continuous
- $X_N := \{x \in X_0 : \hat{g}_{iN}(x) \leqslant 0, i = 1, ..., p\}$
- $\hat{g}_{iN}(x) := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} G_i(x, \xi^j)$

Si suponemos que:

- Las funciones de sample average g_{iN} convergen uniformemente a g_i en una vecindad de x.
- Las funciones g_i son continuas para $i = 1, ..., p$.
- $\forall x_N \in X_N$, $\exists x : x_N$ converge a x casi seguramente.

Demuestre que $x \in X$.

Solución:

Primero $x_N \in X_N$, ie:

$$g_{iN}(x_N) \leqslant 0$$

Por lo tanto tenemos:

$$\begin{aligned} g_i(x) &\leqslant g_i(x) - g_{iN}(x_N) \\ &\leqslant |g_i(x) - g_{iN}(x_N)| \\ &\leqslant |g_i(x) - g_i(x_N)| + |g_{iN}(x_N) - g_i(x_N)| \end{aligned}$$

Y sabemos que g_{iN} converge uniformemente a g_i en una vecindad de x, por lo tanto existe un $\mu > 0$ pequeño tal que g_{iN} converge uniformemente a g_i en $\mathcal{B}(x, \mu)$. Además, sabemos que x_N converge casi seguramente a x, ie:

$$\begin{gathered} \forall \epsilon > 0, \exists P : \forall N \geqslant P, |x_N - x| \leqslant \epsilon \\ \Rightarrow \exists P_\mu : \forall N \geqslant P_\mu, |x_N - x| \leqslant \mu \\ \text{ie: } \exists P_\mu : \forall N \geqslant P_\mu, x_N \in \mathcal{B}(x, \mu) \end{gathered}$$

Por lo tanto

$$|g_{iN}(x_N) - g_i(x_N)| \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ademas:

$$|x_N - x| \underset{N \to +\infty}{\overset{c.s.}{\longrightarrow}} 0$$

Por continuidad de g_i se tiene entonces que:

$$|g_i(x_N) - g_i(x)| \underset{N \to +\infty}{\overset{c.s.}{\longrightarrow}} 0$$

Por lo tanto:

$$\begin{gathered} g_i(x) \leqslant 0 \\ \text{ie: } x \in X \end{gathered}$$

Pregunta 2

Considere el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & c^\top x + \mathbb{E}\left[Q(x, \xi)\right] \\ \text{s.t:} \quad & \\ & Ax = b \\ & x \geqslant 0 \end{aligned}$$

Con $Q(x, \xi)$ el valor óptimo del problema de segunda etapa:

$$\begin{aligned} \min_{y \in \mathbb{R}^m} \quad & q^\top y \\ \text{s.t:} \quad & \\ & Tx + Wy = h \\ & y \geqslant 0 \end{aligned}$$

Sea un sampleo iid $\xi = (\xi^1, ..., \xi^N)$.

1. Escriba la la expresión de x^{j+1} durante una iteración del algoritmo de Stochastic Approximation.
   Solución:
   Tenemos:

   $$x^{j+1} = \Pi_X \left(x^j - \gamma^j G(x_j, \xi^j) \right)$$

   Con:

   - $X := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$.
   - Π el operador de projección sobre X.
   - $G(x, \xi) \in \partial \left(c^\top x + Q(x, \xi) \right)$

   Ya sabemos que si $\bar{\pi}$ es solución óptima del dual de segunda etapa:

   $$-T^\top \bar{\pi} \in \partial Q(x, \xi)$$

   Por lo tanto tenemos:

   $$\begin{gathered} Q(x', \xi) - Q(x, \xi) \geqslant -T^\top \bar{\pi}(x' - x), \, \forall x' \in \mathbb{R}^n \\ \text{ie: } \left[c^\top x' + Q(x', \xi)) \right] - \left[c^\top x + Q(x, \xi)) \right] \geqslant \left[c^\top - T^\top \bar{\pi} \right] (x' - x), \, \forall x' \in \mathbb{R}^n \\ \text{ie: } (c^\top - T^\top \bar{\pi}) \in \partial (c^\top x + Q(x, \xi)) \end{gathered}$$

   Por lo tanto tenemos:

   $$x^{j+1} = \Pi_X \left(x^j - \gamma^j (c^\top - T^\top \bar{\pi}) \right)$$

   Además sabemos que:

   $$\Pi_X(x) = \arg\min_{z \in X} ||z - x||$$

   Por lo tanto, el paso a cada iteración para encontrar el siguiente x_{j+1} es:

   $$x^{j+1} = \arg\min_{z \in X} ||z - \left(x^j - \gamma^j \left(c^\top - {T^j}^\top \bar{\pi}^j \right) \right)||$$

ie: x^{j+1} solución óptima de:

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad & ||x - x^j + \gamma^j \left(c^\top - {T^j}^\top \bar{\pi}^j\right)|| \\ \text{s.t:} \quad & \\ & Ax = b \\ & x \geqslant 0 \end{aligned}$$

Con γ^j el paso del algoritmo y $\bar{\pi}^j$ la solución óptima del dual de segunda etapa dado el sampleo ξ^j:

$$\begin{aligned} \max_{\pi} \quad & \pi^\top (h^j - T^j x^j) \\ \text{s.t:} \quad & \\ & {W^j}^\top \pi \leqslant q^j \end{aligned}$$

2. Suponiendo $\gamma^j = \frac{1}{4(j+1)}$ y considerando el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \quad & x - y_1 - 6y_2 + 10y_3 \\ \text{s.t:} \quad & \\ & T_1 x - 5y_1 - 2y_2 + 7y_3 = h_1 \\ & T_2 x + y_1 - 3y_2 + y_3 = h_2 \\ & x, y_1, y_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

En donde $T = (T_1, T_2)$ y $h = (h_1, h_2)$ son inciertos y toman valores de acuerdo a los siguientes escenarios equiprobables: escenario 1: $T^1 = (1, 1)$ y $h^1 = (2, 1)$; escenario 2: $T^2 = (2, 1)$ y $h^2 = (-1, 0)$. La variable x se selecciona a-priori y las variables y_1, y_2 se ajustan a la incertidumbre.

Hagan las iteraciones del algoritmo de Stochastic Approximation que les es posible efectuar con los datos disponibles.

Solución:

Tenemos solamente dos escenarios, ie: dos sampleos disponibles, por lo tanto podremos hacer dos iteraciones. Se puede aplicar el resultado de la pregunta precedente:

El dual del problema de segunda etapa para $j = 1, 2$ es:

$$\begin{aligned} \max_{\pi} \quad & \pi^\top (h^j - T^j x^j) \\ \text{s.t:} \quad & \\ & W^\top \pi \leqslant q \end{aligned}$$

Con:

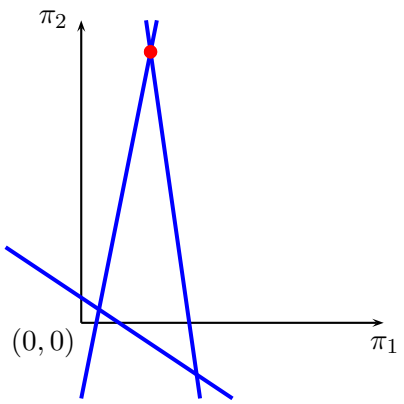
$$W = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 7 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$q = \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Partemos con una solución de primera etapa factible, ie $x_0 = 0$.

Iteración 1
$T^1 = (1, 1)$ y $h^1 = (2, 1)$ por lo tanto el dual es:

$$\begin{aligned} \max_{\pi} \quad & 2\pi_1 + \pi_2 \\ \text{s.t:} \quad & \\ & -5\pi_1 + \pi_2 \leqslant -1 \\ & -2\pi_1 - 3\pi_2 \leqslant -1 \\ & 7\pi_1 + \pi_2 \leqslant 10 \end{aligned}$$



Cuya solución óptima es $\bar{\pi}^1 = (\frac{11}{12}, \frac{43}{12})$

De la pregunta anterior sabemos que:

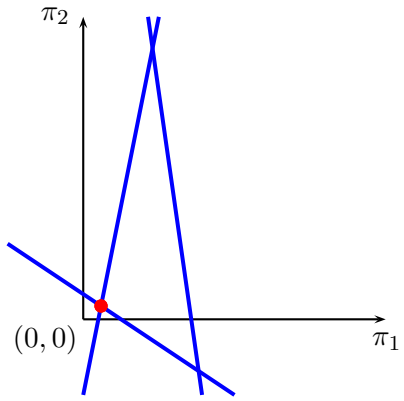
$$x^1 = \arg\min_{x \in \mathbb{R}} ||x - x^0 + \gamma^0 \left(c^\top - {T^1}^\top \bar{\pi}^1 \right) ||$$

Con $c = (1)$. ie:

$$x^1 = \arg\min_{x \in \mathbb{R}} |x - \tfrac{7}{8}|$$
$$\text{ie: } x^1 = \tfrac{7}{8}$$

Iteración 2
$T^2 = (2, 1)$ y $h^2 = (-1, 0)$ por lo tanto el dual es:

$$
\begin{aligned}
\max_{\pi} \quad & -\tfrac{11}{4}\pi_1 - \tfrac{7}{8}\pi_2 \\
\text{s.t:} \quad & \\
& -5\pi_1 + \pi_2 \leqslant -1 \\
& -2\pi_1 - 3\pi_2 \leqslant -1 \\
& 7\pi_1 + \pi_2 \leqslant 10
\end{aligned}
$$



Cuya solución óptima es $\bar{\pi}^2 = (\frac{4}{17}, \frac{3}{17})$

De la pregunta anterior sabemos que:

$$x^2 = \arg\min_{x \in \mathbb{R}} ||x - x^1 + \gamma^1 \left(c^\top - {T^2}^\top \bar{\pi}^2 \right)||$$

Entonces:

$$x^2 = \arg\min_{x \in \mathbb{R}} |x - \tfrac{113}{136}|$$
$$\text{ie: } x^2 = \tfrac{113}{136}$$