

Auxiliar 1-Enunciado

Profesores: Daniel Espinoza, Fernando Ordoñez

Auxiliar: Renaud Chicoisne

Ejercicio 1.7

Considere el problema de *Assembly problem* en el caso donde toda la demanda tiene que ser satisfecha, atrasando su entrega si es necesario. En este caso, cuesta b_i postergar la entrega de una unidad del producto i de un periodo. Se puede hacer pedidos adicionales de los insumos faltantes despues de que se conoce la demanda al último periodo D_T . Formule el problema como un *linear multistage stochastic programming problem*.

Solución:

El problema de *Assembly problem* se puede formular de la manera siguiente: para el periodo T se resuelve:

$$\begin{aligned} Q_T(x_{T-1}, y_{T-1}, d_T) = & \min_{z_T, y_T} (l - q)^\top z_T - s^\top y_T \\ \text{s.t:} & \\ & y_T = y_{T-1} + x_{T-1} - A^\top z_T \\ & 0 \leq z_T \leq d_T \\ & y_T \geq 0 \end{aligned}$$

Que es igual al problema de segunda etapa, dado que en este momento se conocen y_{T-1} y x_{T-1} y que la realización de D_T , d_T ha sido observado. Definiendo $Q_{t+1}(x_t, y_t, d_{[t]}) := \mathbb{E} \{Q_{t+1}(x_t, y_t, D_{[t+1]}) | D_{[t]} = d_{[t]}\}$, se resuelven sucesivamente los siguientes problemas para $t = T - 1, \dots, 1$.

$$\begin{aligned} Q_t(x_{t-1}, y_{t-1}, d_t) = & \min_{z_t, y_t} (l - q)^\top z_t + h^\top y_t + c^\top x_t + Q_{t+1}(x_t, y_t, d_{[t]}) \\ \text{s.t:} & \\ & y_t = y_{t-1} + x_{t-1} - A^\top z_t \\ & 0 \leq z_t \leq d_t \\ & y_t \geq 0 \end{aligned}$$

Para terminar, se resuelve el problema inicial que determine la cantidad de insumos x_0 dado que $Q_1(x_0, d_1)$ depende solamente del pedido inicial x_0 y de la realización d_1 de la primera demanda D_1 :

$$\min_{x_0 \geq 0} c^\top x_0 + \mathbb{E}[Q_1(x_0, D_1)]$$

Para incorporar la posibilidad de postergar el cumplimiento de la demanda de un periodo a otro, definamos las variables $(w_t = (w_{it})_{i \in \{1, \dots, n\}})_{t \in \{1, \dots, T-1\}}$ que representan la cantidad de cada producto i que se posterga para un periodo $t' > t$. Por lo tanto tenemos la formulación que sigue: para el último periodo T tenemos que resolver:

$$\begin{aligned} Q_T(x_{T-1}, y_{T-1}, \mathbf{w}_{T-1}, d_T) = & \min_{z_T, y_T} (l - q)^\top z_T - s^\top y_T + \mathbf{c}^\top \mathbf{x}_T \\ \text{s.t:} & \\ & y_T = y_{T-1} + x_{T-1} - A^\top z_T + \mathbf{x}_T \\ & \mathbf{0} \leq z_T \leq d_T \\ & z_T = d_T + \mathbf{w}_{T-1} \\ & y_T \geq 0 \end{aligned}$$

Para los periodos anteriores $t \in \{T-1, \dots, 1\}$ tenemos que resolver:

$$\begin{aligned} Q_t(x_{t-1}, y_{t-1}, \mathbf{w}_{t-1}, d_t) = & \min_{z_t, y_t} (l - q)^\top z_t + h^\top y_t + c^\top x_t + \mathbf{b}^\top \mathbf{w}_t + Q_{t+1}(x_t, y_t, \mathbf{w}_t, d_{[t]}) \\ \text{s.t:} & \\ & y_t = y_{t-1} + x_{t-1} - A^\top z_t \\ & \mathbf{w}_t = d_t + \mathbf{w}_{t-1} - z_t \\ & \mathbf{0} \leq z_t \leq d_t + \mathbf{w}_{t-1} \\ & y_t \geq 0 \end{aligned}$$

Con $Q_{t+1}(x_t, y_t, \mathbf{w}_t, d_{[t]}) := \mathbb{E} \{Q_{t+1}(x_t, y_t, \mathbf{w}_t, D_{[t+1]}) | D_{[t]} = d_{[t]}\}$

Para terminar, se resuelve el problema inicial, igual que en el problema original:

$$\min_{x_0 \geq 0} c^\top x_0 + \mathbb{E}[Q_1(x_0, D_1)]$$

Imponiendo $w_0 = 0$ en el problema $t = 1$.

Ejercicio 1.10

Muestre que la función de valor óptimo $Q_t(W_t, \xi_{[t]})$ del problema de *Multistage Portfolio selection*, es concava en W_t .

Solución:

El problema de *Multistage Portfolio selection* se puede formular de la manera siguiente: al penúltimo periodo $t = T-1$, se conoce la realización $\xi_{[T-1]} = (\xi_1, \dots, \xi_{T-1})$, y la asignación x_{T-2} ha sido fijada, por lo tanto, se tiene que resolver el problema que sigue:

$$\begin{aligned}
Q_{T-1}(W_{T-1}, \xi_{[T-1]}) = & \max_{x_{T-1} \geq 0, W_T} \mathbb{E} \{U[W_T] | \xi_{[T-1]}\} \\
\text{s.t:} & \\
& W_T = \sum_{i=1}^n \xi_{iT} x_{i,T-1} \\
& W_{T-1} = \sum_{i=1}^n x_{i,T-1}
\end{aligned}$$

Luego, se resuelven los problemas para $t = T - 2, \dots, 1$:

$$\begin{aligned}
Q_t(W_t, \xi_{[t]}) = & \max_{x_t \geq 0, W_{t+1}} \mathbb{E} \{Q_{t+1}(W_{t+1}, \xi_{[t+1]}) | \xi_{[t]}\} \\
\text{s.t:} & \\
& W_{t+1} = \sum_{i=1}^n \xi_{i,t+1} x_{i,t} \\
& W_t = \sum_{i=1}^n x_{i,t}
\end{aligned}$$

Finalmente, se resuelve el problema inicial para $t = 0$:

$$\begin{aligned}
& \max_{x_0 \geq 0, W_1} \mathbb{E} \{Q_1(W_1, \xi_1)\} \\
\text{s.t:} & \\
& W_1 = \sum_{i=1}^n \xi_{i,1} x_{i,0} \\
& W_0 = \sum_{i=1}^n x_{i,0}
\end{aligned}$$

Mostramos que $W_t \mapsto Q_t(W_t, \xi_{[t]})$ es convexa. Primero, tenemos como supuesto que $W \mapsto U(W)$ es una función concava no decreciente. Además, se sabe que un operador de sumatoria no negativa conserva la convexidad/concavidad. Esto aplica en particular para la esperanza que vale:

$$\mathbb{E} \{U[W_T] | \xi_{[T-1]}\} = \int_{\Xi_T} \mathbb{P}(\xi_T = z | \xi_{[T-1]}) U(W_T = \sum_{i=1}^n z_i x_{i,T-1}) dz$$

Dado que $\mathbb{P}(\xi_T = z | \xi_{[T-1]}) \geq 0$, entonces $W_T \mapsto \mathbb{E} \{U[W_T] | \xi_{[T-1]}\}$ es concava. En consecuencia, el problema asociado al periodo $T - 1$ reescrito como un problema de minimización de una función convexa en un conjunto convexo satisface las condiciones de Slater:

$$\begin{aligned}
Q_{T-1}(W_{T-1}, \xi_{[T-1]}) = & \min_{x_{T-1} \geq 0, W_T} -\mathbb{E} \{U[W_T] | \xi_{[T-1]}\} \\
\text{s.t:} & \\
& W_T = \sum_{i=1}^n \xi_{iT} x_{i,T-1} \\
& W_{T-1} = \sum_{i=1}^n x_{i,T-1}
\end{aligned}$$

Esto implica que hay dualidad fuerte y que:

$$Q_{T-1}(W_{T-1}, \xi_{[T-1]}) = \max_{\alpha, \beta} \min_{x_{T-1} \geq 0, W_T} \left\{ -\mathbb{E} \{U[W_T] | \xi_{[T-1]}\} + \alpha \left[W_T - \sum_{i=1}^n \xi_{iT} x_{i,T-1} \right] + \beta \left[W_{T-1} - \sum_{i=1}^n x_{i,T-1} \right] \right\}$$

Entonces existen $\exists \bar{\alpha}, \bar{\beta}$ tales que:

$$Q_{T-1}(W_{T-1}, \xi_{[T-1]}) = \min_{x_{T-1} \geq 0, W_T} -\mathbb{E} \{U[W_T] | \xi_{[T-1]}\} + \bar{\alpha} \left[W_T - \sum_{i=1}^n \xi_{iT} x_{i,T-1} \right] + \bar{\beta} \left[W_{T-1} - \sum_{i=1}^n x_{i,T-1} \right]$$

Que es el mínimo de funciones lineales y por lo tanto cóncavo en W_{T-1} .

Ahora, mostremos que es tambien cierto para cualquier $t = T - 2, \dots, 1$: Sean W_t^1 y W_t^2 dos riquezas al principio del periodo t . Resolver el problema:

$$\begin{aligned} Q_t(W_t^k, \xi_{[t]}) = & \max_{x_t \geq 0, W_{t+1}} \mathbb{E} \{Q_{t+1}(W_{t+1}, \xi_{[t+1]}) | \xi_{[t]}\} \\ \text{s.t:} & \\ & W_{t+1} = \sum_{i=1}^n \xi_{i,t+1} x_{i,t} \\ & W_t^k = \sum_{i=1}^n x_{i,t} \end{aligned}$$

entrega una solución óptima (x_t^k, W_{t+1}^k) , para $k = 1, 2$.

Asimismo, el problema con riqueza $\lambda W_t^1 + (1 - \lambda)W_t^2$ al principio del periodo t es:

$$\begin{aligned} Q_t(\lambda W_t^1 + (1 - \lambda)W_t^2, \xi_{[t]}) = & \max_{x_t \geq 0, W_{t+1}} \mathbb{E} \{Q_{t+1}(W_{t+1}, \xi_{[t+1]}) | \xi_{[t]}\} \\ \text{s.t:} & \\ & W_{t+1} = \sum_{i=1}^n \xi_{i,t+1} x_{i,t} \\ & \lambda W_t^1 + (1 - \lambda)W_t^2 = \sum_{i=1}^n x_{i,t} \end{aligned}$$

Se puede notar que $(\lambda x_t^1 + (1 - \lambda)x_t^2, \lambda W_{t+1}^1 + (1 - \lambda)W_{t+1}^2)$ es factible para este último problema, por lo tanto se tiene que:

$$Q_t(\lambda W_t^1 + (1 - \lambda)W_t^2, \xi_{[t]}) \geq \mathbb{E} \{Q_{t+1}(\lambda W_{t+1}^1 + (1 - \lambda)W_{t+1}^2, \xi_{[t+1]}) | \xi_{[t]}\}$$

Y sabemos de la hipotesis de inducción que $W_{t+1} \mapsto Q_t(W_{t+1}, \xi_{[t+1]})$ es concava:

$$Q_{t+1}(\lambda W_{t+1}^1 + (1 - \lambda)W_{t+1}^2, \xi_{[t+1]}) \geq \lambda Q_{t+1}(W_{t+1}^1, \xi_{[t+1]}) + (1 - \lambda)Q_{t+1}(W_{t+1}^2, \xi_{[t+1]})$$

Aplicando una esperanza a la última expresión obtenemos:

$$\mathbb{E} [Q_{t+1}(\lambda W_{t+1}^1 + (1 - \lambda)W_{t+1}^2, \xi_{[t+1]})] \geq \lambda \mathbb{E} [Q_{t+1}(W_{t+1}^1, \xi_{[t+1]})] + (1 - \lambda) \mathbb{E} [Q_{t+1}(W_{t+1}^2, \xi_{[t+1]})]$$

Entonces obtenemos:

$$\mathbb{E} [Q_{t+1}(\lambda W_{t+1}^1 + (1 - \lambda)W_{t+1}^2, \xi_{[t+1]})] \geq \lambda Q_t(W_t^1, \xi_{[t]}) + (1 - \lambda)Q_t(W_t^2, \xi_{[t]})$$

Finalmente obtenemos:

$$Q_t(\lambda W_t^1 + (1 - \lambda)W_t^2, \xi_{[t]}) \geq \lambda Q_t(W_t^1, \xi_{[t]}) + (1 - \lambda)Q_t(W_t^2, \xi_{[t]})$$

ie: si $W_{t+1} \mapsto Q_{t+1}(W_{t+1}, \xi_{[t+1]})$ es concava, $W_t \mapsto Q_t(W_t, \xi_{[t]})$ es concava tambien.

Por inducción, $W_t \mapsto Q_t(W_t, \xi_{[t]})$ es concava $\forall t \in \{T - 1, \dots, 1\}$.