Optimización de Portafolios

Patricia Saavedra Barrera[1]

14 de noviembre de 2008

[1]Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, psb@xanum.uam.mx

Capítulo 1

Optimización de Portafolios

El objetivo de esta proyecto es determinar la composición de un portafolio de inversión, integrado por acciones de empresas que se negocian en la Bolsa Mexicana de Valores (BMV), cuyo riesgo sea el menor posible y que obtenga un rendimiento más alto que una inversión a plazo fijo.

A través de este problema se busca que el alumno aprenda, entre otras cosas, a:

1. Analizar datos reales a través de la aplicación de algunas herramientas estadísticas.
2. Formular matemáticamente un problema de optimización con restricciones.
3. Aplicar algunas técnicas y resultados de optimización cuadrática con restricciones lineales de igualdad y desigualdad.
4. Analizar e interpretar los resultados para evaluar el modelo propuesto.

1.1. Introducción

Al tiempo $t = 0$ se tiene un monto M que se desea invertir a una semana en un portafolio de inversión, integrado con acciones de n empresas. Se tiene como datos los precios diarios de cada una de las acciones en los tres meses previos a $t = 0$. El número de acciones de cada empresa se deben determinar de tal forma que el riesgo del portafolio sea mínimo y su rendimiento semanal sea igual o mayor a una r^* dada.

Para tener una mejor idea del problema, revisemos algunos conceptos de finanzas. Un monto M^0 que se invierte en el banco a un interés r anual, al término de un año se convierte en un monto M^1 igual a

$$M^1 = M^0 + rM^0 = (1 + r)M^0.$$

Observemos que $r = \frac{M^1 - M^0}{M^0}$ es la ganancia relativa, se le conoce como el rendimiento de la inversión, y en el caso de los depósitos a plazo fijo coincide con la tasa de interés.

En el caso de las acciones, como de otros activos financieros, el rendimiento durante un periodo de tiempo, se define por las variaciones relativas del precio del activo y está dado por

$$r = \frac{P^1 - P^0}{P^0}, \tag{1.1}$$

con P^0 el precio al tiempo inicial y P^1 al tiempo final. Observemos que $P^1 = (1+r)P^0$, por lo que el concepto de rendimiento coincide con el que definimos para depósitos bancarios.

Los rendimientos de un depósito bancario son deterministas porque al depositar el dinero sabemos de antemano el rendimiento exacto que se recibirá a la fecha de vencimiento; en el caso de las acciones, las variaciones del precio dependen de muchos factores: del desempeño de la empresa, de la situación económica del país, del tipo de cambio, de las tasas de interés e inclusive de qué tan optimistas o pesimistas son los participantes en el mercado accionario. En suma, son tantos los factores que intervienen, que es difícil prever de antemano si se incrementarán o se reducirán y, más difícil aún, en cuánto lo harán. Dado que no podemos determinar con certeza el rendimiento a futuro de cada acción, ésta se comporta como una variable aleatoria. En consecuencia, al tiempo $t = 0$, a lo más a lo que podemos aspirar es a calcular el valor esperado del rendimiento de una acción.

Una forma de calcular el valor esperado de una variable aleatoria es a través del cálculo del primer momento de la distribución. ¿Qué tipo de distribución tienen los rendimientos de los activos con riesgo? Para tener una idea analicemos el comportamiento histórico de éstos; por ejemplo, a través de un histograma de los rendimientos diarios de cada acción.

1.2. Dejar hablar los datos

En el anexo 2 se presentan los precios diarios de varias acciones de la BMV: $A1$ =Telmex serie L, $A2$ =Televisa serie C, $A3$ =Cemex, $A4$ =GModelo, $A5$ =CIE serie B, $A6$ =Bimbo serie A, del 3 de enero al 14 de abril del 2005. Observar que lo que se tiene es una serie de tiempo en lugar de una muestra de datos, o sea una sucesión de variables aleatorias, independientes e idénticamente

distribuidas. Sin embargo, los analizaremos como si fuera una muestra. Con los datos anteriores realizar las siguientes tareas:

1. Hallar los rendimientos diarios a partir de los precios diarios de cada acción. Usar la expresión (1.1) y comparar con la que se obtiene al calcular el rendimiento a través de
$$r = \ln\left(\frac{P^1}{P^0}\right).$$
Observemos que la expresión (1.1) es la aproximación lineal del $\ln\left(\frac{P^1}{P^0}\right)$.

2. Graficar los rendimientos diarios para cada una de las acciones. La Figura 1.1 muestra los rendimientos de Cemex.

3. Graficar el histograma para los rendimientos de cada acción. Proponer una posible distribución. Comprobar, por medio de una prueba de hipótesis, por ejemplo por medio de una prueba de bondad de ajuste o la prueba de Smirnov-Kolmogorov

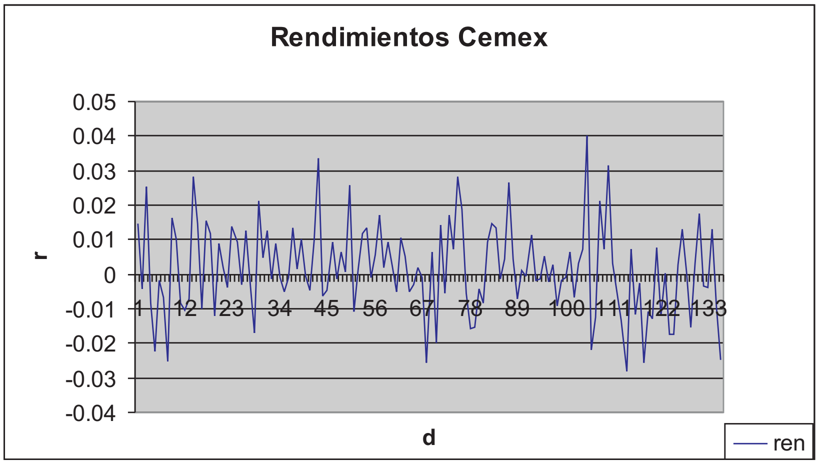

Figura 1.1: Rendimientos diarios de una acción.

si la distribución es la adecuada. A continuación, se muestra en la Figura 1.2 el histograma correspondiente a los rendimientos de la acción de Cemex.

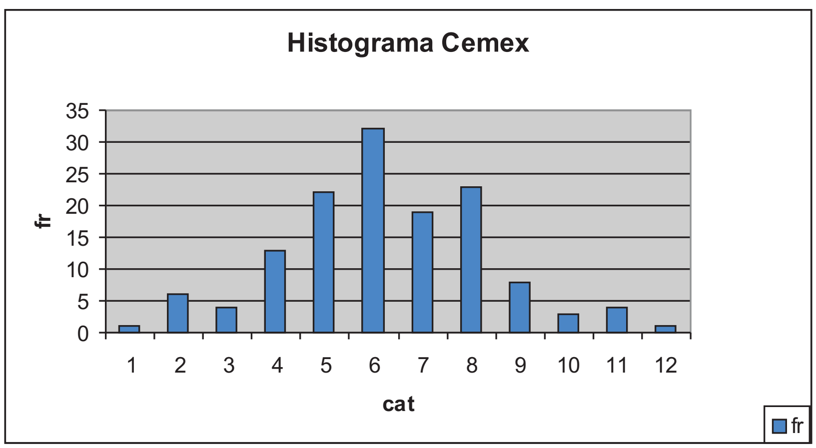

Figura 1.2: Histograma de los rendimientos de una acción

4. Primera suposición: los rendimientos son normales. Discutir las ventajas de asumir ésto. Por ejemplo, la varianza y la esperanza determinan la distribución. Desventaja: ¿son realmente normales en cualquier periodo y para cualquier acción? Observar las colas: ¿son más pesadas que las de la normal? es decir, el área bajo ellas es mayor que en el caso de la distribución normal.

5. Si suponemos que los rendimientos diarios son normales, basta con determinar su esperanza y su varianza para determinar su distribución. Cuando no se conoce esta información, se puede estimar a través de la media y varianza muestral. El rendimiento diario esperado $E(r_i)$ se puede estimar por medio de los datos a través de la media

muestral

$$E(r_i) \approx \overline{r}_i = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\frac{P_i^{j+1}-P_i^j}{P_i^j} \approx \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\ln\left(\frac{P_i^{j+1}}{P_i^j}\right).$$

Para estimar el valor esperado de los rendimientos semanales basta con multiplicar por 5 los rendimientos medios estimados, los rendimientos semanales también son normales.

La varianza σ_i^2 mide qué tanto se alejan los rendimientos reales del valor promedio, por lo que es una forma adecuada de evaluar el riesgo de una acción. La varianza muestral $\overline{\sigma}_i^2$ es un buen estimador de la varianza y se calcula por

$$\overline{\sigma}_i^2 = \frac{1}{M-1}\sum_{j=1}^{M}\left[\ln\left(\frac{P_i^{j+1}}{P_i^j}\right)-\overline{r}_i\right]^2.$$

6. Es importante también determinar la dependencia entre los rendimientos de las acciones. La covarianza mide esta dependencia. Se estima la covarianza a través de la covarianza muestral $\overline{Cov}(r_i, r_j)$ que se calcula por

$$\overline{Cov}(r_i, r_j) = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}\left(\ln(\frac{P_i^{k+1}}{P_i^k})-\overline{r}_i\right)\left(\ln(\frac{P_j^{k+1}}{P_j^k})-\overline{r}_j\right).$$

1.3. Formulación matemática del problema

1. **Marco teórico** (Modelación matemática del mercado financiero).

   En el mercado financiero hay participantes a quienes se denominan agentes financieros que compran y venden activos financieros. Los activos financieros se clasifican en activos financieros de renta fija, cuyos rendimientos son deterministas, y activos financieros de renta variable, acciones y bienes de consumo cuyos rendimientos tienen incertidumbre.

   El modelo de mercado con el que se trabajará tiene las siguientes reglas:

   a) Se trabaja en un mercado ideal en el que los bancos prestan y dan réditos a la misma tasa de interés.

   b) Principio de comparación: entre dos inversiones al mismo plazo, los inversionistas prefieren aquella que tenga rendimientos más altos.

   c) Principio de aversión al riesgo: si una inversión no tiene rendimientos fijos entonces tiene un riesgo. Entre dos inversiones con plazo y rendimiento estimado igual, se prefiere la de menor riesgo. Una inversión con riesgo debe tener rendimientos más altos que otra similar con riesgo menor. La tolerancia al riesgo es personal.

d) Principio de no arbitraje: no se puede tener un portafolio de inversión cuyo precio inicial P^0 sea cero, pero cuyo precio $P^1 \geq 0$ y su valor esperado estrictamente mayor que cero; o sea que sin invertir un centavo se tenga una posibilidad de hacer una ganancia positiva.

e) Para simplificar el modelo se asume que se pueden comprar fracciones de acciones.

f) Por realismo se permiten compras en corto; es decir, que se puede pedir prestado para comprar ciertas acciones. En este caso, para distinguir el dinero prestado del propio, a las cantidades prestadas que se inviertan se denotan con signo negativo.

2. **Planteamiento del problema** Definición de la función objetivo, de las variables y los datos del problema.

   Objetivo: Dados n activos con rendimiento esperado $\overline{r}_i$ y varianza estimada $\overline{\sigma}_i$, determinar el portafolio con costo M y rendimiento esperado r^* que tenga mínimo riesgo.

   El rendimiento relativo de un activo A_i se denotará por r_i y se define por la expresión (1.1). Si el precio al tiempo final P_i^1 es una variable aleatoria, también lo es r_i. Sea m_i el número de acciones que se compran del activo i. Entonces

$$\begin{aligned} M &= m_1 P_1^0 + \ldots m_n P_n^0, \\ 1 &= \frac{m_1 P_1^0}{M} + \cdots + \frac{m_n P_n^0}{M} \end{aligned}$$

   Sean $w_i = \frac{m_i P_i^0}{M}$ la variable que representa el porcentaje del capital M invertido en el activo A_i. Las variables w_i son las variables del problema de optimización. La ventaja de definir a las variables como w_i es que éstas no dependen del monto a invertir, por lo que podemos plantear el problema para cualquier monto M.

   Las restricciones que deben satisfacer las w_i son las siguientes:

   a) Para que se cumpla el requisito de que el costo del portafolio sea igual a M se debe satisfacer que

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1.$$

   b) La segunda restricción es que el rendimiento del portafolio sea mayor al de un depósito a plazo fijo, supongamos que se cumple si es igual a r^*.

   Para formular esta restricción en términos de las w_i, se hace lo siguiente: denotemos por V^0 el valor del portafolio al tiempo cero, V^1 el valor del portafolio al tiempo t_1, y como r_p a los rendimientos del portafolio al tiempo $t = 1$. El rendimiento del portafolio es igual a

$$r_p = \frac{V^1 - V^0}{V^0},$$

como $V^0 = M$ entonces

$$\begin{aligned} r_p &= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i[P_i^1 - P_i^0] = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i P_i^0}{M}\frac{[P_i^1 - P_i^0]}{P_i^0}, \\ &= \sum_{i=1}^{n} w_i r_i. \end{aligned}$$

La segunda restricción se formula matemáticamente de la siguiente forma:

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^{n} w_i E(r_i) \approx \sum_{i=1}^{n} w_i \overline{r_i} = r^*.$$

La función a minimizar se llama la función objetivo. La función objetivo es el riesgo del portafolio. El riesgo de un portafolio puede medirse de muchas formas, ver [3]. En el caso que se suponga que los rendimientos son normales, la varianza del portafolio es una buena medida de su riesgo ya que cualquier otra medida de riesgo depende de la varianza, por ejemplo el *Var*, ver [3]. La varianza de un portafolio se calcula de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} Var(r_p) &= E[(r_p - E(r_p))^2], \\ &= E[(\sum_{i=1}^{n} w_i r_i - E(r_p))^2], \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i\ w_j\ E[r_i - E(r_i)]\ E[r_j - E(r_j)], \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Cov(r_i, r_j) w_i w_j \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \overline{Cov}(r_i, r_j) w_i w_j. \end{aligned}$$

En suma la formulación matemática del problema del portafolio óptimo es

$$\begin{array}{lc} & Min\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{Cov}(r_i, r_j)\ w_i\ w_j \\ \text{sujeto a} & \sum_{i=1}^{n} w_i \overline{r_i} = r^*, \\ & \sum_{i=1}^{n} w_i = 1. \end{array}$$

La función objetivo se divide por un medio por comodidad. Si se denota como $[\Sigma]$ la matriz con componentes $[\Sigma]_{ij} = \overline{Cov}(r_i, r_j)$, a w como el vector con componentes w_i, $\overrightarrow{r}$ el vector con componentes $\overline{r}_i$, y $\overrightarrow{1}$ al vector con todos sus componentes igual a uno, la forma matricial del problema anterior es

$$\begin{array}{lc} & Min\ \frac{1}{2} w^t\ [\Sigma]\ w \\ \text{sujeto a} & w^t \overrightarrow{r} = r^*, \\ & \overrightarrow{1}^t w = 1. \end{array}$$

¿Qué sucede si no se permiten ventas en corto?

$$
\begin{array}{rc}
 & Min\ \frac{1}{2}w^t\ [\Sigma]\ w \\
\text{sujeto a} & w^t\overrightarrow{r} = r^*, \\
 & \overrightarrow{1}^t w = 1, \\
 & w_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n.
\end{array}
$$

El formular matemáticamente el problema de esta forma es idea de Markowitz, ganador del Premio Nobel de Economía por su teoría de riesgo-rendimiento, entre otras cosas.

El modelo como un problema de optimización

El problema del portafolio óptimo con ventas en corto es un ejemplo de un problema de optimización de una función objetivo cuadrática con restricciones lineales de igualdad. Es un caso particular del siguiente problema general:

$$
\begin{array}{c}
Min\ f(w) \\
\text{sujeto a } w\ \in \Omega,
\end{array}
$$

con $f : \Re^n \rightarrow \Re$ dos veces continuamente diferenciable y $\Omega = \{x \in \Re^n | h_j(w) = 0, j = 1, \ldots, m\}$.

En el anexo 1 se presentan las condiciones de primero y segundo orden que debe cumplir un punto $w \in \Omega$ para ser un mínimo del problema tanto para el caso de restricciones de igualdad como de desigualdad.

1.4. Solución del problema del portafolio

El problema que se plantea es:

$$
\begin{array}{c}
Min\ \frac{1}{2}w^t[\Sigma w] \\
\text{sujeto a } w\ \in \Omega,
\end{array}
$$

con

$$
\Omega = \{w \in R^n | h_1(w) = \overrightarrow{r} \cdot w - r^* = 0,\ h_2(w) = \overrightarrow{1} \cdot w - 1 = 0\},
$$

donde $\overrightarrow{1}^t = (1, \ldots, 1)$.

La matriz de varianza-covarianza es positiva definida por lo que este problema admite una solución única $w \in \Omega$ siempre que w sea un punto regular (véase el Anexo 1). Observemos que salvo en el caso de que el portafolio se componga de activos que tienen todos el mismo rendimiento, el resto de los portafolios admisibles son regulares ya que

$$
V = \{\overrightarrow{r}, \overrightarrow{1}\}
$$

es un conjunto linealmente independiente. Por otro lado, el espacio de direcciones admisibles está formado por

$$N(x) = \{y \in \Re^n | \overrightarrow{r}^t y = 0, \overrightarrow{1}^t y = 0\}$$

con dimensión $n - 2$.

Al aplicar las condiciones de primer orden, se obtiene el siguiente sistema lineal de ecuaciones

$$[\Sigma]w - \lambda \overrightarrow{r} - \mu \overrightarrow{1} = 0, \quad (1.2)$$
$$w^t \overrightarrow{r} = r^*, \quad (1.3)$$
$$\overrightarrow{1}^t w = 1. \quad (1.4)$$

Por comodidad se puso signo negativo en los términos que tienen los multiplicadores de Lagrange. En el caso de las restricciones de igualdad, el signo de los multiplicadores de Lagrange no es importante. El sistema anterior tiene como solución única a

$$w^* = \lambda[\Sigma]^{-1}\overrightarrow{r} + \mu[\Sigma]^{-1}\overrightarrow{1}. \quad (1.5)$$

Al substituir w^* en (2.3) y (2.4) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones para μ y λ

$$\overrightarrow{r^t}\ [\Sigma]^{-1}\ \overrightarrow{r}\ \lambda + \overrightarrow{1}^t\ [\Sigma]^{-1}\ \overrightarrow{r}\ \mu = r^*, \quad (1.6)$$
$$\overrightarrow{1}^t\ [\Sigma]^{-1}\ \overrightarrow{r}\ \lambda\ +\ \overrightarrow{1}^t\ [\Sigma]^{-1}\ \overrightarrow{1}\ \mu = 1, \quad (1.7)$$

cuya solución es

$$\lambda = \frac{r^*A - B}{\Delta} \quad \mu = \frac{C - r^*B}{\Delta},$$

con

$$A = \overrightarrow{1}^t[\Sigma]^{-1}\overrightarrow{1}, \quad B = \overrightarrow{1}^t[\Sigma]^{-1}\overrightarrow{r},$$
$$C = \overrightarrow{r^t}[\Sigma]^{-1}\overrightarrow{r}, \quad \Delta = AC - B^2.$$

$\Delta \neq 0$ siempre que los rendimientos de las acciones no sean todos iguales. Observemos que por la desigualdad de Cauchy-Schwartz, $\Delta > 0$, ya que

$$| < \overrightarrow{r}, \overrightarrow{1} >_{\Sigma^{-1}} | \leq ||\overrightarrow{r}||_{\Sigma^{-1}}||\overrightarrow{1}||_{\Sigma^{-1}},$$

con $||\overrightarrow{w}||_{\Sigma^{-1}} = \overrightarrow{w^t}[\Sigma]^{-1}\overrightarrow{w}$.

Por otro lado, la varianza del portafolio mínimo es

$$\begin{aligned}(\sigma^*)^2 &= (w^*)^t[\Sigma]w^* = (w^*)^t[\Sigma](\lambda[\Sigma]^{-1}\overrightarrow{r} + \mu[\Sigma]^{-1}\overrightarrow{1}),\\ &= \lambda(w^{*t}\overrightarrow{r}) + \mu(w^{*t}\overrightarrow{1}).\end{aligned}$$

Al substituir λ y μ y al usar el hecho que w^* está en Ω se obtiene que

$$(\sigma^*)^2 = \frac{A(r^*)^2 - 2Br^* + C}{\Delta}. \quad (1.8)$$

1.5. Interpretación de los resultados

A cada portafolio admisible w se le puede asociar un punto (σ_w, r_w) en el plano cuyo eje de las abcisas representa σ y el eje de las ordenadas a r. A σ_w se le llama la volatilidad del portafolio w. El conjunto $\{(\sigma_w, r_w)\ |w \in \Omega\}$ se le llama el conjunto de riesgo-rendimiento. Los puntos (σ^*, r^*), correspondientes a los portafolios óptimos w^*, están sobre la frontera del conjunto de riesgo-rendimiento ya que dado un r^* tienen la volatilidad mínima. Determinemos la forma de la frontera despejando a r^* de la expresión (1.8); entonces dado σ, r se obtiene que

$$r(\sigma) = \frac{B}{A} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{A}(\sigma^2 - \frac{1}{A})},$$

cuya gráfica es una hipérbola. En la Figura 1.3 se presenta la gráfica de un conjunto de riesgo-rendimiento de un ejemplo que se analizará más adelante.

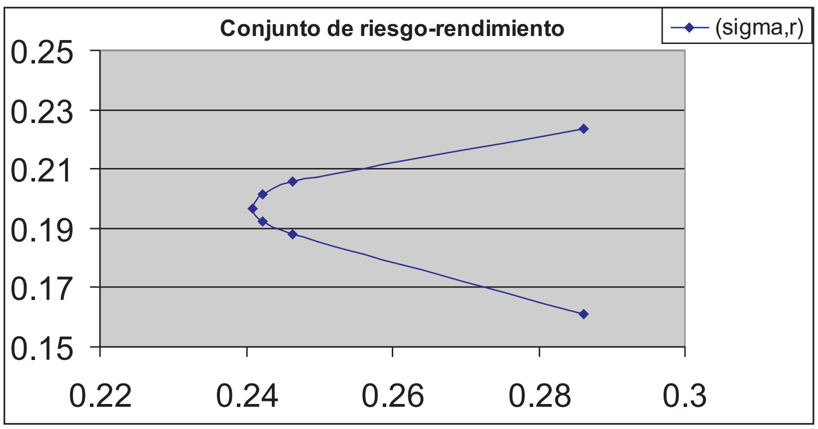

Figura 1.3: Conjunto de riesgo-rendimiento del ejemplo 1.

El portafolio de mínima varianza se obtiene igualando la primera derivada de σ respecto a r a cero:

$$\frac{d\sigma}{dr} = \frac{2Ar - 2B}{\Delta} = 0 \Rightarrow r_{MV} = \frac{B}{A}.$$

El valor de $\sigma_{MV} = \frac{1}{\sqrt{A}}$. Por lo que $r(\sigma)$ es una hipérbola con vértice en $(\frac{1}{\sqrt{A}}, \frac{B}{A})$ y asíntotas

$$\frac{B}{A} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{A}}\sigma.$$

Para el portafolio de mínima varianza los multiplicadores de Lagrange correspondientes son $\lambda_{MV} = 0$ y $\mu_{MV} = 1/A$. En consecuencia

$$w_{MV} = \frac{[\Sigma]^{-1}\overrightarrow{1}}{A},$$

lo que es equivalente a resolver el sistema

$$[\Sigma]w_{MV} = \frac{\overrightarrow{1}}{A}.$$

Observemos que la curva que va del portafolio de mínima varianza hacia arriba representa aquellos portafolios que dado un riesgo tienen rendimiento máximo, por lo que a la parte superior de la curva se le llama la frontera eficiente.

Por otro lado, si escogemos $\mu = 0$ se obtiene que $r_d = C/B$, siempre que $B \neq 0$; entonces si denotamos como w_d al portafolio correspondiente obtenemos que

$$[\Sigma]w_d = \frac{\overrightarrow{r}}{B}, \quad \sigma_d = \frac{\sqrt{C}}{B}.$$

Notemos que cualquier w^* que satisfaga la ecuación (1.5) se puede escribir en términos del portafolio de mínima varianza w_{MV} y del portafolio w_d ya que

$$w^* = (\lambda B)\ w_d + (\mu A)\ w_{MV}; \tag{1.9}$$

lo que implica que cualquier portafolio sobre la frontera se puede escribir como combinación lineal de los portafolios w_d y w_{MV}. Observemos que w^* satisface también la ecuación (2.4) ya que $(\lambda B) + (\mu A) = 1$.

Este resultado no sólo se cumple para los portafolios w_d y w_{MV} sino para cualesquiera dos portafolios w_1 y w_2 sobre la frontera de la región de riesgo-rendimiento con rendimientos r_1 y r_2, respectivamente. Como w_1 se puede escribir como $w_1 = (1-a)\ w_{MV} + a\ w_d$ y $w_2 = (1-b)\ w_{MV} + b\ w_d$, con $a, b \geq 0$, entonces resolviendo para w_1 y w_2 y substituyendo en (1.9) se obtiene que todo portafolio en la frontera se puede escribir como combinación lineal de dos portafolios sobre dicha frontera. Este resultado se conoce con el nombre del teorema de dos fondos. Como consecuencia, si se desea invertir en la bolsa una cantidad de dinero, en lugar de tratar de integrar uno mismo su portafolio, basta con seleccionar dos fondos de inversión en el mercado que estén sobre la frontera eficiente e invertir en ellos.

Se tienen tres activos no correlacionados, es decir con $\overline{Cov}(r_i, r_j) = 0$ si $i \neq j$, y con rendimientos estimados $\overline{r_1} = 0.2$, $\overline{r_2} = 0.25$ y $\overline{r_3} = 0.15$. Suponga que $\overline{\sigma_1^2} = 0.2$, $\overline{\sigma_2^2} = 0.18$ y $\overline{\sigma_3^2} = 0.15$. Entonces el problema a minimizar es

$$\begin{gathered} Min\ \tfrac{1}{2}[0.2w_1^2 + 0.18w_2^2 + 0.15w_3^2] \\ \text{sujeto a } 0.2w_1 + 0.25w_2 + 0.15w_3 = r^*, \\ \textstyle\sum_{i=1}^{3} w_i = 1. \end{gathered}$$

El portafolio de mínima varianza w_{MV} es: $w_1 = 0.290322$, $w_2 = 0.32258$, $w_3 = 0.38710$, con rendimiento $r_{MV} = 0.1951$ y volatilidad o desviación estándar igual a $\sigma_{MV} = 0.24097$.

El portafolio w_d es $w_1 = 0.295082$, $w_2 = 0.409836$, $w_3 = 0.295082$, con rendimiento $r_d = 0.205738$ y volatilidad $\sigma_d = 0.246393$. En la gráfica 3 se representa el conjunto de riesgo-rendimiento para este ejemplo.

1.6. Extensiones del modelo

Supongamos que se desea integrar un portafolio de inversión con las mismas características del ejemplo anterior sin endeudarse, o sea sin ventas en corto. El problema a resolver es en este caso:

$$
\begin{aligned}
& Min\ \tfrac{1}{2}w^t\ [\Sigma]\ w && (1.10)\\
\text{sujeto a}\quad & w^t\overrightarrow{r} = r^*, && (1.11)\\
& \overrightarrow{1}^t w = 1, && (1.12)\\
& -w_i \leq 0, \quad i = 1, \ldots, n. && (1.13)
\end{aligned}
$$

Para este problema las condiciones de primero orden son distintas a las del caso con restricciones de igualdad y se conocen con el nombre de condiciones de Kuhn y Tucker, ver el Anexo I.

Aplicación al problema del portafolio

El problema de optimización de portafolios sin ventas en corto es un problema de optimización cuadrática con desigualdades lineales. En este caso las condiciones de Kuhn y Tucker (KT) correspondientes son: existen λ y $\mu \in \Re$, y $\nu_i \geq 0$, con $i = 1, \ldots, n$ tal que

$$\Sigma w + \lambda\overrightarrow{r} + \mu\overrightarrow{1} - \sum_{i=1}^{n} \nu_i \overrightarrow{e}_i = 0, \tag{1.14}$$

$$w^t\overrightarrow{r} = r^*, \tag{1.15}$$

$$\overrightarrow{1}^t w = 1, \tag{1.16}$$

$$\nu_i w_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.17}$$

con $\overrightarrow{e}_i$ el i-ésimo vector de la base canónica de $\Re^n$.

Si denotamos como w^* el punto admisible que satisface las condiciones KT entonces las condiciones de segundo orden para que este punto sea un mínimo de la función objetivo en Ω están dadas por

$$y^t[\Sigma]y > 0$$

para toda $y \in N(w^*)$ con $y \neq 0$. Como $[\Sigma]$ es positiva definida en todo $\Re^n$ también lo es en $N(w^*) \subset \Re^n$.

El algoritmo a seguir en este caso es clasificar todos los puntos de

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{ll} w \in \Re^n | & h_1(w) = w^t\overrightarrow{r} - r^* = 0, \\ & h_2(w) = \overrightarrow{1}^t w - 1 = 0, \\ & h_{i+2} = -w_i \leq 0,\ i = 1, \ldots, n \end{array} \right\}$$

dependiendo de si las restricciones h_i son activas o pasivas. Es decir h_i es activa si $w_i = 0$ y es pasiva si $w_i > 0$. Para cada subconjunto hay que comprobar si en algún punto se satisfacen las condiciones de Kuhn y Tucker.

Consideremos el ejemplo anterior cuando se tienen tres activos no correlacionados, el problema a minimizar es el siguiente

$$
\begin{gathered}
Min\ \tfrac{1}{2}[0.2w_1^2 + 0.18w_2^2 + 0.15w_3^2]\\
\text{sujeto a } 0.2w_1 + 0.25w_2 + 0.15w_3 = r^*,\\
\textstyle\sum_{i=1}^{3} w_i = 1,\\
w_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 3.
\end{gathered}
$$

Como primer paso clasifiquemos los puntos de Ω dependiendo de que las restricciones $h_i(w) = w_i$ sean pasivas o activas. Para ello definamos el conjunto

$$\hat{\Omega} = \{w \in \Re^n | w \cdot \overrightarrow{r} = r^*, w \cdot \overrightarrow{1} = 1\}.$$

Entonces los puntos admisibles se pueden clasificar en los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned}
S_1 &= \{w \in \hat{\Omega} | w_i > 0, i = 1, \ldots, 3\}, \\
S_2 &= \{w \in \hat{\Omega} | w_1 = 0\}, \\
S_3 &= \{w \in \hat{\Omega} | w_2 = 0\}, \\
S_4 &= \{w \in \hat{\Omega} | w_3 = 0\}, \\
S_5 &= \{w \in \hat{\Omega} | w_1 = w_2 = 0\} = \{(0,0,1)\}, \\
S_6 &= \{w \in \hat{\Omega} | w_1 = w_3 = 0\} = \{(0,1,0)\}, \\
S_7 &= \{w \in \hat{\Omega} | w_2 = w_3 = 0\} = \{(1,0,0)\}.
\end{aligned}$$

Observemos que en S_5, S_6 y S_7 ningún punto es regular, por haber más restricciones que incógnitas, por lo que no se cumplen las condiciones KT. Analicemos si existe algún punto w de S_1 que satisfaga las condiciones de KT correspondientes: existen λ y $\mu \in \Re$, tal que

$$\Sigma w + \lambda \overrightarrow{r} + \mu \overrightarrow{1} = 0, \tag{1.18}$$
$$w^t \overrightarrow{r} = r^*, \tag{1.19}$$
$$\overrightarrow{1}^t w = 1. \tag{1.20}$$

Resolviendo este sistema en términos de r^* obtenemos que si $r^* \in [0.163636, 0.234483]$ entonces

$$\begin{aligned}
w_1^* &= 0.53097345 r^* + 0.18584071, \\
w_2^* &= 9.73451327 r^* - 1.59292035, \\
w_3^* &= 2.40707965 - 10.2654867 r^*.
\end{aligned}$$

Para S_3 se cumplen las condiciones KT para

$$w_1^* = 20r^* - 3, \quad w_2^* = 0 \quad y \; w_3^* = 4 - 20r^*.$$

siempre que $r^* \in [.15, .163636]$.

Para S_4 se cumplen las condiciones KT para

$$w_1^* = 5 - 20r^*, \quad w_2^* = 20r^* - 4 \quad y \; w_3^* = 0.$$

si $r^* \in [.234482, .25]$.

En la Figura 1.4 se presenta el conjunto de riesgo-rendimiento correspondiente. Observemos que esta región es un subconjunto de la región de riesgo-rendimiento con ventas en corto.

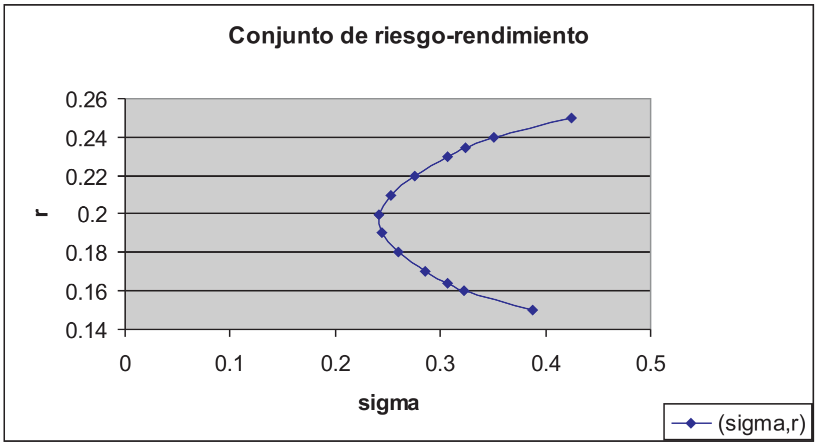

Figura 1.4: Región de riesgo-rendimiento del ejemplo 2.

Este procedimiento no es el método más eficiente; en la literatura especializada hay mejores métodos para aproximar la solución, ver [7] y [5]. Uno de ellos se puede aplicar en el caso que se tenga una función objetivo cuadrática con restricciones lineales de desigualdad y consiste en transformar este problema en un problema de programación lineal. Para ello, se imponen como restricciones del problema de programación lineal las condiciones de Kuhn y Tucker junto con las restricciones de no negatividad. De esta manera una solución admisible automáticamente cumple las condiciones de Kuhn-Tucker. Por otro lado, se usa el procedimiento de variables artificiales de programación lineal para encontrar una solución admisible. Se introducen tantas variables artificiales, no negativas, como restricciones de igualdad se tengan; en el caso del portafolio son n+2 variables artificiales y_i. Por último, se propone como función objetivo la suma de las y_i, de $i = 1, \ldots, n+2$. En suma el problema a minimizar es

$$\begin{array}{rc} & Min\ \sum_{i=1}^{n+2} y_i \\ \text{sujeto a} & \Sigma w + \lambda \overrightarrow{r} + \mu \overrightarrow{1} + \sum_{i=1}^{n} (y_i - \nu_i) \overrightarrow{e}_i = 0, \\ & w^t \overrightarrow{r} + y_{n+1} = r^*, \\ & \overrightarrow{1}^t w + y_{n+2} = 1, \\ & w_i, \nu_i, y_i \geq 0. \end{array}$$

Se puede usar cualquier software para resolver este problema. En particular Excel tiene el Solver, Mathematica y Matlab tienen subrutinas específicas de programación lineal.

1.7. Trabajo Final de los alumnos

El trabajo final que presentaron los alumnos consistió de las siguientes preguntas. Los resultados se presentaron por escrito y se expusieron frente a todo el grupo.

1. Se tiene un inversionista con un millón de pesos que desea invertir en acciones de 6 empresas: Telmex, Televisa, Cemex, Modelo, CIEB y Bimbo. En el anexo 2 se listan los precios diarios de estas acciones del 1 de enero al 14 de abril del 2005. Estime la media, la varianza y covarianza muestral de los rendimientos semanales a partir de los datos diarios.

2. Use los datos del inciso anterior para determinar el portafolio que durante la tercera semana de abril del 2005 da un rendimiento r^* y que minimiza el riesgo según la teoría de Markowitz. Plantee el problema anterior como un problema de optimización con la posibilidad de que haya o no haya ventas en corto.

3. Determine, cuando hay ventas en corto, el portafolio de mínima varianza y otro portafolio sobre la frontera eficiente que le permita construir la frontera eficiente. Grafíquela. ¿Cuál es el portafolio con mínimo riesgo que tiene rendimiento semanal igual a $r^* = .001923$ que corresponde a un rendimiento anual del 10 % anual. Exprese este portafolio como combinación lineal de los dos portafolios que determinó en el inciso anterior.

4. Determine el portafolio con rendimiento igual a $r^* = .001923$ cuando no hay ventas en corto. Utilice Excel, Mathematica o Matlab para ello.

5. Modifique el problema de optimización de portafolios para que haya la posibilidad de invertir en un activo sin riesgo; es decir, con rendimiento fijo r_f y con riesgo igual a cero. ¿Cuál sería el problema a resolver? Grafique la frontera eficiente correspondiente. Demuestre que en este caso cualquier portafolio sobre la frontera eficiente se puede escribir como combinación lineal de un portafolio que se compone únicamente del activo sin riesgo y de un portafolio, llamado portafolio tangente, que corresponde a un punto sobre la frontera eficiente que está sobre la recta tangente al conjunto de riesgo-rendimiento y que pasa por el punto $(0, r_f)$. A esto se le conoce con el nombre del teorema de un fondo. Aplique estos resultados para obtener el portafolio tangente correspondiente a los datos del inciso 1, tomando $r_f = .001442$, que corresponde a un interés del 7.5 % anual, cuando se permiten o no ventas en corto.

Respuestas del inciso 1 al 4

1. Para los datos del anexo 2 se tiene como estimación de los rendimientos semanales de cada acción el vector

$$\overline{r} = [-0.008263, -0.008043, -0.000848, 0.001975, -0.036164, 0.002627].$$

La matriz de varianza-covarianza de los rendimientos semanales es

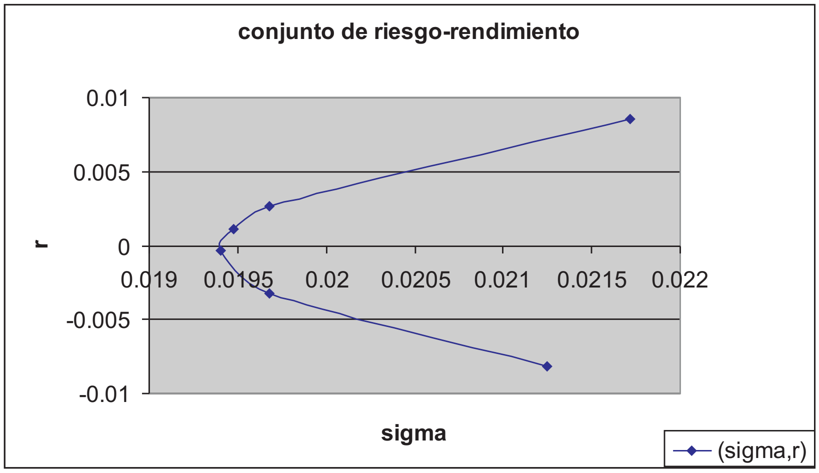

Figura 1.5: Conjunto de riesgo-rendimiento del trabajo final.

$$\begin{pmatrix} 0.000577 & 0.000358 & 0.000377 & 0.00019 & 0.000487 & 0.000375 \\ 0.000358 & 0.001069 & 0.000466 & 0.000316 & 0.000784 & 0.000509 \\ 0.000377 & 0.000466 & 0.000955 & 0.000286 & 0.00061 & 0.000318 \\ 0.00019 & 0.000316 & 0.000286 & 0.000683 & 0.000396 & .0000524 \\ 0.000487 & 0.000784 & 0.00061 & 0.000396 & 0.003931 & 0.00206 \\ 0.000375 & 0.000509 & 0.000318 & .0000524 & 0.00206 & 0.003007 \end{pmatrix}$$

Los elementos de la diagonal son la varianza de los rendimientos del activo i.

2. Cuando hay ventas en corto el portafolio de mínima varianza es el siguiente

$$w_{MV} = [0.421959, 0.059621, 0.093159, 0.402855, -0.073832, 0.096239],$$

con volatilidad y rendimiento semanal igual a 0.01940647, -0.000326657, respectivamente.

Al ser $B < 0$ se escoge como r_d el rendimiento máximo de los rendimientos de las acciones que componen el portafolio, el portafolio w_d correspondiente es igual a

$$w_d = [0.374505, 0.0468219, 0.120587, 0.442456, -0.118106, 0.133736],$$

con volatilidad y rendimiento semanal igual a (0.021251, .002627), respectivamente.

El portafolio óptimo que tiene rendimiento semanal igual a .001923 es

$$w = [0.374505, 0.046822, 0.120587, 0.442456, -0.11806, 0.133736],$$

con volatilidad semanal igual a 0.019564. En la Figura 1.5 se muestra la región de riesgo-rendimiento.

1.8. Conclusiones del modelo

El modelo de riesgo-rendimiento es uno de los modelos más sencillos para integrar un portafolio de inversión. Sus principales hipótesis son que los rendimientos de los activos con riesgo son normales y que tanto los rendimientos como la matriz de varianza-covarianza se pueden estimar con bastante precisión. Los rendimientos son dinámicos por lo que debe tenerse mucho cuidado al utilizar este método. Si se integra el portafolio para intervalos cortos, de dos o tres días, y los cambios en los rendimientos son pequeños, el modelo dará resultados satisfactorios. De hecho, este modelo es la base del modelo CAPM que es utilizado por muchas instituciones financieras para calcular sus posiciones diarias.

Para un análisis más sofisticado se supone que los precios siguen un proceso estocástico browniano geométrico y el portafolio de optimización se calcula por medio de un problema de optimización estocástica que da lugar a un problema de ecuaciones en derivadas parciales, ver [4] para mayor información.

Anexo 1: Resultados teóricos de optimización

Condiciones de primero y segundo orden

En esta sección se denotará en negritas a las funciones vectoriales y a los vectores de $\Re^n$. A las condiciones que debe cumplir un punto $x^* \in \Omega$ para ser el mínimo de una función dos veces diferenciable f se le conocen como condiciones de primero y segundo orden. Las de primer orden involucran tanto al gradiente de la función como el gradiente de las restricciones mientras que las de segundo orden dependen del hessiano de la función y de las restricciones.

Sea F una función de $\Re^n$ a los reales y sea Ω el conjunto de $\Re^n$ definido por

$$\Omega = \{\mathbf{x} \in \Re^n \mid h_j(\mathbf{x}) = 0 \text{ para } j = 1, \dots m\},$$

donde h_j puede ser una función lineal o no lineal. Un problema de restricciones de igualdad es de la forma

$$\underset{\mathbf{x}\in\Omega}{Min} \quad F(\mathbf{x}).$$

Por ejemplo, en el caso lineal las restricciones son de la forma

$$h_j(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_j^t \mathbf{x} - e_j = 0.$$

Definición 1.8.1. *Diremos que* $\mathbf{x} \in \Re^n$ *es un punto admisible de un problema de minimización con restricciones si* $\mathbf{x} \in \Omega$.

$>$Qué se entiende por el mínimo de f restringido a un conjunto Ω?

Definición 1.8.2. *Un punto* $\mathbf{x}^*$ *se dice que es un mínimo de* F *restringido a un subconjunto* Ω *de* $\Re^n$ *si*

$$F(\mathbf{x}^*) \leq F(\mathbf{x}) \quad \forall\ \mathbf{x} \in \Omega.$$

Si un punto $\mathbf{x}^*$ es un máximo o un mínimo de F restringido a Ω se dice que $\mathbf{x}^*$ es un punto extremo de F en Ω.

Definición 1.8.3. *Definamos como la matriz jacobiana del vector* $\mathbf{h}^t = (h_1(\mathbf{x}), \dots, h_m(\mathbf{x}))$ *a la matriz* $m \times n$ *con componentes*

$$J_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

La matriz jacobiana de $\mathbf{h}$ tiene como renglón i al gradiente de h_i. Esta matriz nos define para cada $\mathbf{x}$ una transformación lineal de $\Re^n$ a $\Re^m$. En el caso que Ω sea el conjunto

$$\Omega = \{\mathbf{x} \in \Re^n \mid h_j(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_j^t \mathbf{x} - e_j = 0 \text{ para } j = 1, \dots m\}$$

entonces $J_{\mathbf{h}} =^t C$ con C la matriz de $m \times n$ que tiene como $j-$ésimo renglón al vector $\mathbf{c}_j^t$.

Denotemos como $N(\mathbf{x})$ al espacio nulo o el nucleo de la transformación $J_{\mathbf{h}}(\mathbf{x})$, es decir

$$N(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \Re^n |\ J_{\mathbf{h}}(\mathbf{x})\ \mathbf{y} = 0\}.$$

$N(\mathbf{x})$ es el espacio ortogonal al espacio generado por los vectores

$$\{\nabla h_1(\mathbf{x}), \ldots, \nabla h_m(\mathbf{x})\}.$$

En el caso de tener restricciones lineales $N(\mathbf{x})$ es igual

$$N(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \Re^n |\ C^t \mathbf{y} = 0\}$$

y consiste de los vectores que son direcciones admisibles. Es decir que si $\mathbf{x} \in \Omega$ y $\mathbf{y} \in N(\mathbf{x})$ entonces existe $t_0 \in \Re$ tal que $\mathbf{x} + t\mathbf{y} \in \Omega$ para $t \in [0, t_0]$.

Definición 1.8.4. *Diremos que $\mathbf{x}^*$ es un punto regular de Ω si el conjunto de vectores*

$$\{\nabla h_1(\mathbf{x}^*), \ldots, \nabla h_m(\mathbf{x}^*)\}$$

es linealmente independiente.

Obsérvese que si $m \leq n$ es posible que los renglones del jacobiano formen un conjunto linealmente independiente, pero si $m > n$ no es posible que haya un punto regular admisible. En el caso lineal o se tiene que todos los puntos son regulares o ninguno pues serán regulares si la matriz C es de rango completo o sea de rango igual a m.

Teorema 1.8.5. *Supongamos que F y h_i con $i = 1, \ldots, m$ son funciones diferenciables en un abierto de R^n que contenga a Ω. Sea $\mathbf{x}^*$ un punto extremo de F en Ω. Si $\mathbf{x}^*$ es un punto regular de Ω entonces existe $\lambda \in \Re^m$ tal que*

$$\nabla F(\mathbf{x}^*) + J_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}^*)^t \lambda = 0. \tag{5.9}$$

La demostración puede verse en [5]

Observemos que, como en el caso lineal, las condiciones de primer orden dan lugar a un sistema de n ecuaciones con $n + m$ incógnitas que junto a las m ecuaciones $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0$, forman un sistema de $n + m$ ecuaciones con $n + m$ incógnitas. Al vector λ se le conoce con el nombre de vector de multiplicadores de Lagrange.

1.8.1. Condiciones de segundo orden

Teorema 1.8.6. *Supóngase que F y h_i, con $i = 1, \ldots, m$, son dos veces continuamente diferenciables en una abierto de $\Re^n$ que contenga a Ω y que existe un punto $\mathbf{x}^*$ en Ω y una $\lambda \in \Re^m$ tal que*

$$\nabla F(\mathbf{x}^*) + J_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}^*)^t \lambda = 0.$$

Supóngase también que la matriz

$$L(\mathbf{x}^*) = H_F(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} H_{h_i}(\mathbf{x}^*) \lambda_i$$

es definida positiva en

$$N(\mathbf{x}^*) = \{\mathbf{y} \in \Re^n | J_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}^*)\mathbf{y} = 0\}.$$

$\Rightarrow \mathbf{x}^*$ *es un mínimo de* F *en* Ω.

La demostración puede verse en [5]. Los puntos máximos de F restringidos a un conjunto Ω satisfacen la misma condición de primer orden, pero L debe ser una matriz negativa definida en $N(\mathbf{x}^*)$.

1.9. Condiciones de Kuhn y Tucker

Consideremos el siguiente problema

$$\begin{array}{cc} \text{Min} & F(x), \\ \text{sujeto a} & h_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \ldots, m \end{array}$$

En general

$$\Omega = \{\mathbf{y} \in \Re^n |\ h_j(\mathbf{y}) = 0,\ j = 1, \ldots, m,\ g_j(\mathbf{y}) \leq 0,\ j = 1, \ldots, s\} \tag{5.14}$$

y las funciones h_j y g_j son funciones de $\Re^n$ a $\Re$ dos veces diferenciables en un abierto que contenga a Ω.

Dado un punto $\mathbf{x}$, se definen como restricciones activas en este punto, aquellas restricciones para las cuales se satisface la igualdad. Denotemos como $I(\mathbf{x})$ a los índices asociados a las restricciones activas en $\mathbf{x}$. En este caso el espacio $N(\mathbf{x})$ se define como

$$N(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \Re^n |\ \nabla h_j(\mathbf{x})^t \mathbf{y} = 0\ j = 1, \ldots, m \text{ y } \nabla g_j(\mathbf{x})^t \mathbf{y} = 0\ \forall j \in I(\mathbf{x})\}.$$

Diremos que $\mathbf{x}$ es un punto regular de Ω si el conjunto de vectores formados por los gradientes de las restricciones activas son linealmente independientes.

Consideremos primero el problema con únicamente restricciones de desigualdad, es decir

$$\begin{array}{c} \text{Min} \quad F(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x} \in \Omega \end{array}$$

con Ω definido por

$$\Omega = \{\mathbf{y} \in \Re^n |\ h_j(\mathbf{y}) \leq 0, j = 1, \ldots, s\},$$

con h_j una función no lineal.

Teorema 1.9.1. *Si* $\mathbf{x}^*$ *es un punto extremo de* F *restringido a* Ω *y si* $\mathbf{x}^*$ *es un punto regular de* Ω *entonces existe* $\mu \in \Re^s$ *con* $\mu_j \geq 0$ *para* $j = 1, \ldots s$ *tal que*

$$\nabla F(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{s} \mu_j \nabla h_j(\mathbf{x}^*) = 0$$

y

$$\mu_j [h_j(\mathbf{x}^*)] = 0 \quad \forall\ j = 1, \ldots, s.$$

Las condiciones de segundo orden son las siguientes.

Teorema 1.9.2. *Supóngase que F y h_i, con $i = 1, \ldots, m$ son dos veces continuamente diferenciables en una abierto de $\Re^n$ que contenga a Ω y que existe un punto $\mathbf{x}^*$ un punto regular en Ω y una $\mu \in \Re^s$, con $\mu_j \geq 0$ para $j = 1, \ldots s$, tal que*

$$\nabla F(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{s} \mu_j \ \nabla h_j(\mathbf{x}^*) = 0.$$

Supóngase también que la matriz

$$L(\mathbf{x}^*) = H_F(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{s} H_{h_i}(\mathbf{x}^*)\mu_i$$

es definida positiva en

$$N(\mathbf{x}^*) = \{\mathbf{y} \in \Re^n | \nabla h_j(\mathbf{x}^*)^t \ \mathbf{y} = 0 \quad \forall j \in I(\mathbf{x}^*)\}.$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{x}^*$ *es un mínimo de F en Ω.*

Anexo 2: Precios de acciones en la Bolsa Mexicana de Valores

Fecha	TELMEX L	TLEVISA	CEMEX	GMODELO	CIE	BIMBO
03-Ene-05	21.42	33.71	81.39	31.03	36.02	28.30
04-Ene-05	21.23	33.04	81.32	31.00	35.80	28.39
05-Ene-05	20.83	32.77	79.26	31.22	35.00	28.49
06-Ene-05	20.87	33.07	79.76	31.10	33.55	28.74
07-Ene-05	20.51	32.43	78.19	30.07	32.55	28.86
10-Ene-05	20.64	32.62	79.30	30.17	33.50	28.01
11-Ene-05	20.28	31.67	78.87	29.71	32.54	28.19
12-Ene-05	20.38	32.24	80.23	30.18	32.49	28.68
13-Ene-05	20.63	32.10	80.81	30.17	32.30	29.81
14-Ene-05	20.76	33.04	83.11	30.31	32.39	29.75
17-Ene-05	20.87	33.40	84.68	30.32	32.60	29.80
18-Ene-05	21.11	33.95	84.20	30.45	33.84	31.20
19-Ene-05	20.83	33.92	82.90	30.40	33.99	30.92
20-Ene-05	20.72	33.18	81.65	30.25	32.63	30.25
21-Ene-05	20.47	32.49	81.30	30.19	32.15	29.72
24-Ene-05	20.68	32.55	80.61	29.88	32.90	30.72
25-Ene-05	20.93	32.64	81.36	30.12	32.05	30.70
26-Ene-05	20.97	33.49	82.55	30.10	32.49	30.79
27-Ene-05	20.98	33.22	83.66	30.01	32.00	30.71
28-Ene-05	20.96	32.76	83.54	30.46	32.40	30.70
31-Ene-05	20.89	33.01	83.89	30.21	32.45	31.25
01-Feb-05	21.27	34.04	86.16	30.28	32.33	32.34
02-Feb-05	21.20	34.20	86.55	30.06	32.60	33.52
03-Feb-05	21.48	34.25	85.94	30.34	32.43	34.60
04-Feb-05	21.49	34.63	86.02	30.67	33.31	33.55
07-Feb-05	21.52	35.03	85.96	30.41	32.58	34.47
08-Feb-05	21.57	35.08	86.96	30.74	32.54	33.95
09-Feb-05	22.36	34.94	86.82	30.82	32.72	33.81
10-Feb-05	22.37	35.58	86.71	31.00	33.85	33.90
11-Feb-05	22.49	35.49	87.18	31.60	34.90	33.95
14-Feb-05	22.43	34.94	86.99	31.90	33.02	33.42
15-Feb-05	22.44	35.59	87.23	32.00	33.13	33.19
16-Feb-05	22.18	35.49	86.43	31.97	33.08	32.39
17-Feb-05	21.89	35.24	86.26	31.89	32.85	32.34
18-Feb-05	21.73	34.95	86.17	32.22	33.40	32.41
21-Feb-05	21.73	35.29	86.73	32.30	33.25	32.30
22-Feb-05	21.47	34.86	86.14	31.99	33.10	32.15
23-Feb-05	21.75	35.00	86.40	32.00	32.57	31.97
24-Feb-05	21.91	35.30	87.02	32.70	32.25	31.70
25-Feb-05	22.03	35.75	90.57	34.24	32.31	31.49
28-Feb-05	21.75	35.78	88.61	33.80	32.12	32.06
01-Mar-05	21.88	36.21	87.53	34.11	31.90	31.82
02-Mar-05	21.95	36.27	89.40	33.68	31.75	32.05
03-Mar-05	22.07	36.25	90.05	34.18	30.68	31.78
04-Mar-05	22.04	35.95	92.95	34.36	30.70	31.50
07-Mar-05	22.17	35.88	93.24	34.14	30.19	31.57
08-Mar-05	21.87	35.51	92.78	34.02	29.89	31.56
09-Mar-05	21.70	35.22	91.57	33.95	29.40	31.50
10-Mar-05	21.43	33.77	89.04	33.48	29.20	30.89
11-Mar-05	21.56	34.08	89.68	33.65	28.29	30.76

Fecha	TELMEX L	TLEVISA	CEMEX	GMODELO	CIE	BIMBO
14-Mar-05	21.19	33.41	88.63	32.94	26.84	29.81
15-Mar-05	20.94	33.19	88.41	32.51	25.70	29.43
16-Mar-05	20.65	33.31	86.19	32.65	25.21	29.89
17-Mar-05	20.55	33.57	85.25	32.30	25.43	30.60
18-Mar-05	19.94	33.44	84.15	32.74	25.99	31.28
22-Mar-05	19.70	32.98	84.79	32.40	25.90	31.69
23-Mar-05	19.79	31.91	83.79	32.00	24.84	31.24
28-Mar-05	19.61	31.97	83.80	31.75	24.60	31.10
29-Mar-05	19.32	31.95	82.36	32.18	22.40	29.37
30-Mar-05	19.42	32.96	80.93	32.20	22.66	29.98
31-Mar-05	19.30	32.88	81.14	32.90	22.81	29.90
01-Abr-05	19.24	32.88	82.20	32.25	22.80	30.00
04-Abr-05	19.20	32.41	82.27	32.25	22.61	29.00
05-Abr-05	19.11	31.87	81.02	31.98	20.63	26.30
06-Abr-05	19.23	31.13	81.27	31.83	21.22	28.28
07-Abr-05	19.62	31.47	82.71	32.10	23.29	30.20
08-Abr-05	19.50	31.49	82.44	32.26	23.99	29.90
11-Abr-05	19.30	31.02	82.13	32.00	23.01	29.99
12-Abr-05	19.36	31.12	83.20	32.00	22.82	29.98
13-Abr-05	19.15	30.82	82.44	31.75	22.44	30.00
14-Abr-05	19.08	30.12	80.43	31.90	21.71	29.36
15-Abr-05	19.08	30.12	80.43	31.90	21.71	29.36

Anexo 3: Programa para calcular el portafolio óptimo

El programa está hecho para Matlab version 6.5.

```
function w=optor(sigma,r,n,rniv,irf,rf)
% programa para calcular la frontera eficiente y el portafolio
% de minima varianza para n activos con riesgo y uno sin riesgo.
% sigma matriz de nxn, r y w vectores de Rn y n entero. rniv= rendimiento
% de un portafolio especifico. irf=0 si no hay activo sin riesgo en el portafolio,
% irf=1 si lo hay.
y1=zeros(n,1);
y2=zeros(n,1);
wmv=zeros(n,1);
uno=ones(n,1);
y3=zeros(n,1);
x=zeros(5,1);
y=zeros(5,1);
xf=zeros(3,1);
yf=zeros(3,1);
wniv=zeros(n,1);

y1=sigma\r
y2=sigma\uno

% calcula A,B,C y delta.
A=sum(y2)
B=sum(y1)
C=sum(r'*y1)
```

```
delta=(A*C)-(B*B)

% Calcula dos portafolios: el de minima varianza
% y el correspondiente a mu=0 y lambda=1.
rmv=B/A
sigmamv=1/sqrt(A)

mumv=(C-(rmv*B))/delta
lambdamv=((rmv*A)-B)/delta
wmv=mumv*y2

% calcula el portafolio en la frontera eficiente wd si B>0.
if B>0 rd=C/B
sigmad=C/B*B;
sigmad=sqrt(sigmad)
lambdad=((rd*A)-B)/delta
mud=0
wd=lambdad*y1
else
    M=max(r);
    rd=M
    mud=(C-(rd*B))/delta
    lambad=((rd*A)-B)/delta
    wd=(lambad*y1)+(mud*y2)
    sigmad=((A*rd*rd)-(2*B*rd)+C)/delta;
    sigmad=sqrt(sigmad)
end

  % calcula el portafolio tangente  para cuando hay el activo sin riesgo
  BRA = B - (rf * A)
  rt = (C - (rf * B)) / BRA
  sigmat=(C-(2*rf*B)+(rf*rf*A))/(BRA*BRA);
  sigmat = sqrt(sigmat)
  y3=(r-(rf*uno))
  wt=sigma\(y3/BRA)


% calcula un portafolio especifico para un rendimiento dado.
if irf==0
  alfa=(rniv-rd)/(rmv-rd)
  wniv=(alfa*wmv)+((1-alfa)*wd)
  niv=(alfa*rmv)+((1-alfa)*rd)
  sigmaniv=desvt(n,wniv,sigma)
  sigmaniv=sqrt(sigmaniv)
```

```
else
  % para el caso en que haya el activo sin riesgo
  lambda=(rniv-rf)/(C-(2*rf*B)+(rf*rf*A))
  wniv=sigma\(lambda*y3)
  wf=1-sum(wniv)
  sigmaniv=desvt(n,wniv,sigma)
end
%calcula y grafica la frontera eficiente

  x(3) = sigmamv
  y(3) = rmv
  x(4)= sigmad
  y(4)=rd
  x(5)=sigmaniv
  y(5)=rniv
  if sigmad>sigmaniv
    x(4)=sigmaniv
    y(4)=rniv
    x(5)=sigmad
    y(5)=rd
  end
  sigma1=((A*rniv*rniv)+(2*B*rniv)+C)/delta
  sigma2=((A*rd*rd)+(2*B*rd)+C)/delta
  if sigmad>sigmaniv
    x(1)=sqrt(sigma2)
    y(1)=-rd
    x(2)=sqrt(sigma1)
    y(2)=-rniv
  else
    x(1)=sqrt(sigma1)
    y(1)=-rniv
    x(2)=sqrt(sigma2)
    y(2)=-rd
  end
if irf==1
xf(1) = 0
yf(1)=rf
if sigmat<sigmaniv
xf(2)=sigmat
yf(2)=rt
xf(3)=sigmaniv
yf(3)=rniv
else
xf(2)=sigmaniv
```

```
yf(2)=rniv
xf(3)=sigmat
yf(3)=rt
end

% grafica la region de riesgo-rendimiento
if irf==0
plot(x,y,'r')
title('conjunto de riesgo-rendimiento')
xlabel('vol')
ylabel('r')   ;pause;
else
    plot(xf,yf,'r')
    title('conjunto de riesgo-rendimiento')
    xlabel('vol')
    ylabel('r')   ;pause;
end
end
% funcion que calcula la varianza de un portafolio
function w=desvt(n,wniv,sigma)
v=sigma*wniv;
v=wniv'*v;
w=v;
end
```

Bibliografía

[1] M. Capinski y T. Zastawniak. Mathematics for Finance. An Introduction to Financial Engineering. Springer Verlag. 2003.

[2] J.E. Ingersoll Jr. Theory of Financial Decision Making. Rowman y Littlefield Studies in Financial Economics. 1987.

[3] P. Jorion. Value at Risk. Mc Graw Hill. Segunda edición. 2001.

[4] R. Korn. Optimal Portafolios. World Scientific, Singapore. 1997.

[5] D. Luenberger. Programación lineal y no lineal. Addison-Wesley. 1989.

[6] D. Luenberger. Investment Science. Oxford University Press. 1998.

[7] A. Peressini, F. Sullivan y J. Uhl. The mathematics of nonlinear programming. Springer Verlag. 1988.

[8] S. R. Pliska. Introduction to Mathematical Finance. Discrete Time models. Blackwell Publishers. 1997.

[9] S. Roman. Introduction to the Mathematics of Finance. Springer Verlag. 2004.